Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2011, Blatt 4

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 09.05.2011, 10:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13:

a. Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $a^{2n+1} - a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

b. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot (n+2).$$

Aufgabe 14:

a. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir definieren $a \sim b$ genau dann, wenn a und b die gleiche Quersumme haben. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? (Diese Frage müsst Ihr zunächst sinnvoll deuten!)

b. Seien $M = \mathbb{N}^2$ und $m = (a, b), m' = (a', b') \in M$. Wir definieren

$$m \sim m' \ :\Longleftrightarrow \ a + b' = a' + b.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow M/\sim, \ z \longmapsto \begin{cases} \overline{(z, 0)}, & z \geq 0 \\ \overline{(0, -z)}, & z < 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 15:

a. Beweise, dass die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ zusammen mit der Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ eine Gruppe definiert.

b. Beweise, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$+ : \ (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$\cdot : \ (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ ein Körper ist.

HINWEIS: Hörer der Vorlesung „Algebraische Strukturen“ bei Michael Cuntz dürfen in Aufgabenteil b. bekannte Resultate aus dieser Veranstaltung verwenden. Für die anderen ist diese Aufgabe eine gute Übung für das Verständnis der Begriffe „Gruppe“ und „Körper“.

Aufgabe 16:

a. Sei K ein Körper und $x \in K$. Zeige, dass $x^2 = 1$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$.

b. Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ nicht–leere, nach oben beschränkte Mengen und

$$M \cdot N := \{x \cdot y \mid x \in M, \ y \in N\}.$$

Zeige, dass $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$.