Fachbereich Mathematik Sommersemester 2011, Blatt 5
Thomas Markwig Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 16.05.2011, 10:00

Aufgabe Nummer 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17:

a. Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

$$\text{(i)}\ z = 2i - 3 \qquad \text{(ii)}\ z = \frac{5-i}{5+2i} \qquad \text{(iii)}\ z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^4}$$

b. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen:

$$\text{(i)}\ |z| \cdot |w| = |z \cdot w| \qquad \text{(ii)}\ z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{(iii)}\ \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \leq |z|$$

Aufgabe 18:

a. Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Ist $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $0 < x^n$.

(ii) Ist $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so gilt $(x < y \iff x^n < y^n)$.

b. Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge $A = \left\{ \frac{2m+n}{9 \cdot m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 19:

a. Gib zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen an, so dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gilt. Begründe Deine Aussage.

b. Untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 20:

a. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweise die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \ \text{ und } \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a) \right)$$

b. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{n^4+2n-1}{6n^5-4n^3+17}$.

(ii) $a_n = \frac{(2n-1)\cdot(n-1)^2-3(n+1)}{1+4n+n^2}$.

(iii) $a_n = \frac{n^4}{\binom{n}{4}}$.