Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2011, Blatt 6

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 23.05.2011, 10:00

Aufgabe Nummer 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 21:

a. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(ii) $a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 + 3)$.

b. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz. Die Berechnung der Grenzwerte im Falle der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^5}{n^4+1000n^5}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{n^2-3n+1}$

Aufgabe 22: Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit Grenzwert a.

a. Zeige, jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert ebenfalls gegen a.

b. Zeige, die Folge der arithmetischen Mittel von $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen a, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Gilt die Umkehrung auch? (Interpretiert zunächst einmal die Frage!)

Aufgabe 23: Zeige die folgenden Aussagen:

a. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

b. Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.

c. Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein. Wir nennen den Grenzwert die *Eulersche Zahl* e.

HINWEIS: Zeige, dass der Grenzwert von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch s_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Aufgabe 24: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{K}$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a. Zeige für $m > n$ gilt $\sum_{i=n+1}^{m} a_i \cdot b_i = s_m \cdot b_{m+1} - s_n \cdot b_{n+1} + \sum_{i=n+1}^{m} s_i \cdot (b_i - b_{i+1})$.

b. Zeige, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot (b_n - b_{n+1})$ und $(s_n \cdot b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergent.

c. Zeige, wenn $(n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (a_n - a_{n+1})$ konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.