Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2011, Blatt 7
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 30.05.2011, 10:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 25: Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{n!} \cdot t^n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{3} \cdot t^n$$

Aufgabe 26:

a. Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produkts $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$.

b. Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.
HINWEIS: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

c. Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

d. Gilt für $x \in \mathbb{K}$ stets: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ konvergent?

Aufgabe 27:

a. Bestimme für die nachfolgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

$$\text{(i)} \quad M_1 = \left\{ \frac{1}{2^m} + \frac{1}{5^n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad M_2 = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

b. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-2x-1}{x^3-x^2+3x-3}$.

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Aufgabe 28:

a. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.

b. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > b$. Zeige, es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > b$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.