Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2011, Blatt 8
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 06.06.2011, 10:00

Aufgabe 29: Bestimme alle $a \in [0,1]$, an denen die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist, und zeige, daß f jeden Wert zwischen $f(0)$ und $f(1)$ annimmt.

Aufgabe 30:

a. Finde eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0,1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

b. Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

c. Zeige, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto n \cdot x \cdot (1-x)^n$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 31:

a. Zeige, ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf U und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in U, so ist auch $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Gilt die Aussage auch noch, wenn f nur stetig ist?

b. Zeige, ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton. Gilt die Aussage auch noch, wenn f nicht stetig ist?

Aufgabe 32:

a. (i) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

(ii) Folgere unter der Voraussetzung, dass $\arctan(x) + \arctan(y)$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegt, das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(iii) Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b. Zeige für $x, y > 0$ und $a > 1$ die Ungleichung

$$\frac{\log_a(x) + \log_a(y)}{2} \leq \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right).$$