Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 20.06.2011, 10:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen.

Aufgabe 33:

a. Überprüfe die Funktionen

$$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

für $n \in \{0,1,2\}$ auf Stetigkeit in 0, Differenzierbarkeit in 0 und stetige Differenzierbarkeit auf $[0,\infty)$.

b. Bestimme für die folgenden Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ den Definitionsbereich U und berechne ihre Ableitung:

(i) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

(ii) $f(x) = (x^2+1) \cdot \arctan(x)$.

(iii) $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$.

Aufgabe 34:

a. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeige, dass f konstant ist.

b. Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f' : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Zeige, dann ist auch die folgende Funktion streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$:

$$g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{für } x > 0, \\ f'(0), & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 35:

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f''(x) + f'(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Zeige, dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 36:

a. Berechne alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.

b. Berechne die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x+3x^3}{\cos(x)\cdot\sin(x)}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ mit $x > 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\cdot\sin(x)}\right)$ mit $x > 0$.