Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2011, Blatt 10

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 27.06.2011, 10:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen.

Aufgabe 37: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ setzen wir $\binom{a}{n} := \frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$ und $\binom{a}{0} := 1$.

a. Bestimme den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot t^n$.

b. Zeige, die durch die Potenzreihe auf $(-r, r)$ definierte Funktion f ist differenzierbar mit

$$(1+x)\cdot f'(x) = a \cdot f(x).$$

Leite daraus ab, daß $f(x) = (1+x)^a$ für $x \in (-r, r)$ gilt.

Hinweis: Um $f(x) = (1+x)^a$ zu zeigen, kann man Aufgabe 34 a. geeignet verwenden.

Aufgabe 38:

a. Es sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+n\cdot x^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeige, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.

(ii) Zeige, daß $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.

(iii) Gilt $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$? Konvergiert $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

b. Finde eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, so daß aber die Folge der Ableitungen $f_n' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht mal punktweise konvergiert.

Aufgabe 39:

a. Berechne das vierte Taylorpolynom $T^4_{f,0}$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{4x^4+x}.$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!

b. (i) Berechne das dritte Taylorpolynom $T^3_{\arctan,0}$ des Arcustangens mit Entwicklungspunkt 0.

(ii) Benutze $T^3_{\arctan,0}$ und Aufgabe 32, um $\frac{\pi}{4}$ und damit π näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit $\pi = 3,14\ldots$.

Aufgabe 40: Wir betrachten die Zerlegung $Z^n = (1, q, q^2, \ldots, q^n)$ des Intervalls $[1,2]$ für $q = \sqrt[n]{2}$ mit Zwischenpunkten $\alpha^n = (q, q^2, \ldots, q^n)$.

a. Zeige, $ZS(\ln, Z^n, \alpha^n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cdot 2 \cdot \ln(2) - \left(2\cdot\sqrt[n]{2} - 1\right)\cdot\frac{\ln(\sqrt[n]{2})}{\sqrt[n]{2}-1}$.

b. Zeige, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

c. Begründe, weshalb $\ln$ auf $[1,2]$ integrierbar ist und berechne das Integral $\int_1^2 \ln(x)\, dx$ mit Hilfe der Zwischensummen aus Teil a..