Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2011, Blatt 11
Stefan Steidel

# Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 04.07.2011, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen.

**Aufgabe 41:** Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

a. $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\ dx$ für $k \in \mathbb{N}$.

b. $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(x)\ dx$.

c. $\int \frac{1}{\sin(x)}\ dx$, substituiere $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

d. $\int \frac{2x^5+7x^4+9x^3+9x^2+6x-5}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\ dx$.

**Aufgabe 42:**

a. Zeige, ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in (0,1)$ mit $\int_0^1 f(x) \cdot x^2\ dx = \frac{f(c)}{3}$.

b. Zeige, für $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))\ dx$. Ist die Aussage auch noch richtig, wenn man die Intervallgrenze $\frac{\pi}{2}$ durch $\pi$ ersetzt?

**Aufgabe 43:** Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^b f(x) \cdot \sin(y \cdot x)\ dx.$$

Zeige mit Hilfe partieller Integration $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = 0$ und $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = 0$.

**Aufgabe 44:** Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen

$$f_n : (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

und

$$F_n : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

.

a. Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-\pi}{2}$.

b. Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall $[\delta, 2\pi-\delta]$ gleichmäßig gegen $f$.

c. Zeige, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,2\pi]$ gleichmäßig gegen

$$F : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

d. Bestimme mit Hilfe von c. den Wert der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Hinweis, in Teil a. darf die Formel aus Aufgabe 12.49 im Skript ohne Beweis verwendet werden; zudem sollte man Aufgabe 43 verwenden. Für b. sollte man sich an den Zusammenhang von $\sin(x)$ und $e^{ix}$ erinnern. In Teil c. wird man unter anderem $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\ dx$ für $k \in \mathbb{N}$ benötigen.