Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2011, Blatt 12
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 11.07.2011, 12:00

Aufgabe 45:

a. Untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x \cdot e^{-tx}\,dx$ konvergiert und bestimme für diese den Wert des Integrals.

b. Zeige, $\int_0^1 x^t \cdot \ln(x)^n\,dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+t)^{n+1}}$ für alle $t > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 46:

a. Zeige, für jedes $y \in (0,\infty)$ ist die Funktion $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}$ streng monoton fallend.

b. Zeige mit Hilfe des Integralkriteriums für Reihen, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right)$ für jedes $y \in (0,\infty)$ konvergiert.

c. Zeige, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$ konvergiert auf jedem Intervall $[\delta,\infty)$ mit $\delta > 0$ gleichmäßig gegen $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

d. Zeige, die Funktion $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto -\frac{1}{y} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right)$ ist eine Stammfunktion von f auf $(0,\infty)$ und erfüllt für alle $y \in (0,\infty)$ die Bedingungen $F'(y) \geq 0$ und $F(y+1) - F(y) = \frac{1}{y}$.

e. Zeige, ist $G : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G'(y) \geq 0$ und $G(y+1) - G(y) = \frac{1}{y}$ für alle $y \in (0,\infty)$, so unterscheiden sich F und G nur um eine Konstante.

Hinweis zu Teil e.: setze $F_n(y) = -\frac{1}{y} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right)$ und zeige $G(y) - F_n(y) = G(y+n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; nutze dies, um $(G-F)'(y) \geq 0$ für alle y zu zeigen; zeige ferner, daß $G - F$ 1-periodisch ist und folgere dann, daß $G - F$ konstant ist.

Aufgabe 47:

a. Zeige, $A(x+y) = Ax + Ay$ und $f_{A+B} = f_A + f_B$ für $x, y \in K^n$ und $A, B \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$.

b. Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

c. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W. Zeige, f ist genau dann K-linear, wenn $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ für alle $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt.

d. Zeige, daß $\left(\mathrm{Gl}_n(K), \circ\right)$ eine Gruppe ist, die für $n > 1$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 48: Welche der folgenden Teilmengen von K^3 sind Unterräume des K^3? Begründe Deine Anworten.

a. $\{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 2x_3^2\}$ für $K = \mathbb{R}$.

b. $\{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$ für $K = \mathbb{R}$.

c. $\{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a^2\}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$ für $K = \mathbb{R}$.

d. $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (1,1,0)^t, (0,0,0)^t\}$ für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.