Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2011, Blatt 14
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Die Lösungen brauchen nicht eingereicht zu werden und werden auch nicht mehr korrigiert. Die Aufgaben sind aber eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur und es wird eine Musterlösung geben. Zudem können in den Tutorien Fragen gestellt werden.

Aufgabe 53:

a. Seien V und W zwei K-Vektorräume, $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und B eine Basis von V.

   (a) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

   (b) Genau dann ist f injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.

   (c) Genau dann ist f bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.

b. Finde einen K-Vektorraum V sowie zwei K-lineare Abbildungen $f, g : V \longrightarrow V$, so daß folgendes gilt:

   (a) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

   (b) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 54:

a. Seien die Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gegeben. Zeige, dass $\mathrm{rang}(B \circ A) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$.

b. Sei V ein K-Vektorraum mit $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$ und $g \in \mathrm{End}_K(V)$.
Zeige, es gibt eine Zahl $0 \leq k \leq n$, so daß für alle $i \geq 1$ gilt

$$\mathrm{Ker}(g^0) \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^1) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(g^{k+i}).$$

Aufgabe 55: Betrachte den Vektorraum $P_n := \left\{\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid a_k \in \mathbb{R}\right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n (siehe Skript Beispiel 23.6) mit Basis $B = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$ und die formale Ableitung

$$d : P_n \longrightarrow P_n : \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

a. Zeige, daß d eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

b. Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

c. Zeige, dass im Fall $n = 3$ auch $D = (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne die Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.

Aufgabe 56: Bestimme den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{F}_5) \quad \text{und} \quad B_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}) \ \text{ für } \ t \in \mathbb{Q}.$$