Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2011, Blatt 16
Thomas Markwig | Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Unten findet Ihr weitere Aufgaben zum Üben der Inhalte der Vorlesung. Ausgearbeitete Lösungen werden wir für diese nicht zur Verfügung stellen.

Aufgabe 61:

(a) Zeige, dass $\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeige, dass $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Skizziere die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

und begründe dabei alle „wesentlichen qualitativen Merkmale“ des Funktionsgraphen.

Aufgabe 62: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so dass $f(r)$ konvergiert. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ ist

$$f(r) - f(x) = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (f(r) - f_n(r)) \left(\frac{x}{r}\right)^n,$$

wobei $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ die Partialsummen von f bezeichnet.

(b) f ist stetig auf $(-r, r]$.

Aufgabe 63: Berechne die folgenden Grenzwerte reeller Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \big((\cos(x) - 1) \cdot \ln(x)\big)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)^{\ln(x)}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$.

Aufgabe 64: Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : (a, b) \longmapsto \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ genau dann in $\mathbb{R}$ existiert, wenn

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, y \in (a, b) : \big(|x - a| < \delta \;\text{ und }\; |y - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon\big).$$

Aufgabe 65:

(a) Berechne die Taylor–Entwicklung von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{\tan(x^2)}$ im Punkt 0 bis zum Grad 4.

(b) Berechne für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\exp(x^3)\cdot\sin(x)}{1+x^5}$ das fünfte Taylor-Polynom $T^5_{f,0}$ um 0.
HINWEIS: Ihr solltet hier mit etwas Überlegung die Berechnung aller fünf Ableitungen von f vermeiden.

(c) Berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,1}$ mit Entwicklungspunkt 1 und gib eine Abschätzung für das Restglied $|f(x) - T^2_{f,1}(x)|$ im Intervall $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ an.

Aufgabe 66: Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{a}{n} := \frac{a\cdot(a-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(a-n+1)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun die Funktion $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1+x)^a$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ und konvergiert (mindestens) auf $(-1, 1)$.

(b) Es gilt $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$, d.h. die Taylor-Reihe stellt auf diesem Intervall die ursprüngliche Funktion dar.
HINWEIS: Berechne die Ableitung von $\frac{T_{f,0}}{f}$.

(c) Zeige durch Differenzieren und anschließendes Integrieren, dass sich die Funktion arcsin auf $(-1, 1)$ als Potenzreihe schreiben lässt. Berechne diese Potenzreihe explizit.

Aufgabe 67: Berechne die folgenden Ableitungen:

(a) $\left(\frac{\ln(x)}{e^x}\right)'$ für $x > 0$.

(b) $\left(\frac{x^2-2x+1}{x+2}\right)'$ für $x \neq 2$.

(c) $(\ln(\ln(x)))'$ für $x > 1$.

(d) $\left(\ln(\sqrt{1+\cos(x)}\right)'$ für $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 68: Seien $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbar Funktion mit $f'(x) = c \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a := f(0)$. Zeige, dass $f(x) = a \cdot e^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 69: Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass f stetig in x_0 und g differenzierbar in x_0 ist mit $g'(x_0) = 0$. Zeige, dass das Produkt $f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 ist mit $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Aufgabe 70: Entscheide, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x \cdot |x|$ differenzierbar ist.

Aufgabe 71: Seien $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \in (0,1], \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$
$$g(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \in (0,1], \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Begründe, dass f an jeder Stelle $x_0 \in (0,1]$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung $f'(x_0)$. Zeige außerdem, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass g differenzierbar ist und bestimme die Ableitungsfunktion $g' : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 72: Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f_{a,b} : [-10,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{a,b}(x) := x^3 + ax^2 + bx$ (in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$).
HINWEIS: Denke an die Randpunkte $-10, 10$ des Intervalls.

Aufgabe 73:

(a) Berechne die Stammfunktionen $\displaystyle\int^y \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)}\, dx$ und $\displaystyle\int^y \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

(b) Zeige, dass $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 74:

(a) Sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{(x-a_1) \cdot \cdots \cdot (x-a_n)}$ eine reelle rationale Funktion, bei der p eine Polynomfunktion vom Grad kleiner als n ist und die $a_1, \ldots, a_n$ alle verschieden sind. Zeige, dass

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - a_i} \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{p(a_i)}{(a_i - a_1)\cdots(a_i - a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ gilt.

(b) Berechne die Stammfunktion $\int^y \frac{x^3+x^2+1}{x^3-x}\, dx$ mit Hilfe von (a).

Aufgabe 75:

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die drei Vektoren $(1,3,4)^t$, $(3,a,11)^t$, $(-1,-4,0)^t \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig? Begründe Deine Aussage.

(b) Zeige, dass $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimme eine Basis von U.

Aufgabe 76: Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}$–Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$:

(a) $U_1 = \{(x, x+1, x+2, x+4)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(b) $U_2 = \{(x, 2x, 3x, 4x)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_3 = x_1 + x_2,\ x_4 = x_2 + x_3\}$,

(d) $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_2 \geq 0\}$,

(e) $U_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$.

Welche dieser Mengen sind Unterräume von V? Begründe Deine Aussage.

Aufgabe 77: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^5$ der von den Vektoren

$$\begin{array}{lll} v_1 = (4,1,1,0,-2)^t, & v_2 = (0,1,4,-1,2)^t, & v_3 = (4,3,9,-2,2)^t, \\ v_4 = (1,1,1,1,1)^t, & v_5 = (0,-2,-8,2,-4)^t & \end{array}$$

aufgespannte Unterraum. Bestimme eine Basis von U und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 78: Seien die Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gegeben. Zeige, dass $\mathrm{rang}(B \circ A) \leq \min\big\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\big\}$.

Aufgabe 79:

(a) Eine Relation $R \in M \times M$ auf einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, wobei Letzteres bedeutet, dass aus $(a, b) \in R$ stets $(b, a) \in R$ folgt. Zeige, dass die Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist.

(b) Seien $0 \neq \lambda \in K$, $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Dann gelten: $Q_i^j(\lambda) = S_j\big(\lambda^{-1}\big) \circ Q_i^j(1) \circ S_j(\lambda)$, und $P_i^j = Q_j^i(1) \circ Q_i^j(-1) \circ Q_j^i(1) \circ S_j(-1)$.

Aufgabe 80: Sei $B := \big((3,5,2)^t, (1,1,-1)^t, (2,4,1)^t\big)$.

(a) Zeige, B ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Ersetze *mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(1,3,2)^t$ und $(-2,1,2)^t$.

Aufgabe 81: Es sei K ein Körper. $U := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 = \ldots = a_n \in K\}$ und $U' := \big\{(a_1, \ldots, a_n) \;\big|\; a_i \in K, \sum_{i=1}^n a_i = 0\big\}$ sind Unterräume des K^n. Bestimme $\dim_K(U)$, $\dim_K(U')$, $\dim_K(U \cap U')$ und $\dim_K(U + U')$.

Aufgabe 82: Bestimme die Matrixdarstellung $M_{B'}^{B}(f)$ der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mapsto (x_1 - x_2, x_2 + x_4, x_1)^t$$

bezüglich der Basen $B = \big((1,0,0,-1)^t, (0,1,0,-1)^t, (0,0,1,-1)^t, (0,0,0,1)^t\big)$ von $\mathbb{R}^4$ und $B' = \big((1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (1,1,1)^t\big)$ von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 83: Betrachte die Basen $B_1 = \big((1,1)^t, (0,1)^t\big)$, $B_2 = \big((2,-1)^t, (2,3)^t\big)$, $B_3 = \big((4,4)^t, (1,2)^t\big)$ und $B_4 = \big((-1,1)^t, (0,2)^t\big)$ des $\mathbb{R}^2$, sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Matrix-Darstellung

$$M_{B_2}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermittle die Transformationsmatrizen $T_{B_4}^{B_2}$ und $T_{B_1}^{B_3}$ mit $T_{B_4}^{B_2} \circ M_{B_2}^{B_1}(f) \circ T_{B_1}^{B_3} = M_{B_4}^{B_3}(f)$.

(b) Ermittle Basen B_5 und B_6 von $\mathbb{R}^2$ mit

$$M_{B_6}^{B_5}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 84: Sei $B = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis des K-Vektorraumes V, $D = (y_1, y_2)$ eine Basis des K-Vektorraumes W und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so dass $M_D^B(f) = (a_{i,j})_{i=1,2;j=1,2,3}$ die Matrix-Darstellung von f bezüglich (B, D) ist. Ferner setzen wir:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 & \qquad y_1' &= y_2 \\ x_2' &= x_2 + x_3 & y_1' &= y_1 - y_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}$$

und $B' = (x_1, x_2, x_3)$ sowie $D' = (y_1', y_2')$.

(a) Zeige, B' ist eine Basis von V und D' ist eine Basis von W.

(b) Bestimme, die Matrix $M_{D'}^{B'}(f)$, d. h. die Matrix-Darstellung von f bezüglich der Basen $\big(B', D'\big)$.

Aufgabe 85: Bestimme, sofern sie existiert, die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 86: Zeige, dass die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ invertierbar ist und berechne die Inverse,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 87: Prüfe, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme lösbar sind, und bestimme ggf. sämtliche Lösungen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & u & = & 4 \\ x & - & y & + & z & + & u & = & 8 \\ 3x & + & y & + & 3z & - & u & = & 6 \end{array}$$

Aufgabe 88: Prüfe, ob die folgende Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, und gib ggf. die inverse Abbildung an:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{pmatrix}.$$