Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 15

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Die Lösungen müssen nicht eingereicht werden und werden auch nicht korrigiert. Die Aufgaben sind aber eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur und es wird eine Musterlösung geben. Zudem können in den Übungen Fragen gestellt werden.

Aufgabe 57:

(a) Berechne den Rang von

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

(b) Bestimme die Inversen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

(c) Transformiere die folgende Matrix A in Normalform bezüglich Äquivalenz und gib auch die Transformationsmatrizen S und T^{-1} an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(d) Prüfe, ob das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ lösbar ist und berechne ggf. die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

(e) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

außer $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen. Bestimme sie.

(f) Überprüfe die folgende Abbildung auf Injektivität und Surjektivität:

$$g : \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^4 \ : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(g) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von f_A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$

(h) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58:

(a) Es sei $U = \langle (1,2,3,4)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Bestimme mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

(b) Es sei $U = \{(a_1, \ldots, a_5)^t \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 - 2a_2 = 0 = 2a_4 + a_5\} \leq \mathbb{R}^5$. Bestimme die Dimension von U sowie eine Basis, die den Vektor $(2,1,1,-1,2)^t$ enthält.

(c) Es seien $U = \langle (1,0,1,1)^t, (-1,1,0,0)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (1,0,1,0)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Zeige, $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$.

(d) Es sei $V = \mathbb{F}_5^3$, $U = \{(x+y, y, y-x)^t \mid x, y \in \mathbb{F}_5\}$ und $U' = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{F}_5^3 \mid z = 2x+y\}$. Bestimme Basen von $U + U'$, $U \cap U'$, V/U und V/U'.

(e) Bestimme eine Basis für $U \cap U'$ mit $U = \langle (2,-1,1,-1)^t, (1,-2,2,1)^t, (3,-1,0,2)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (3,-2,3,8)^t, (2,1,-5,3)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 59: Es sei $B = \big((1,1,1,1)^t, (-1,0,0,1)^t, (0,-1,0,1)^t, (0,0,-1,1)^t\big)$ und $D = \big((1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (0,0,1)^t\big)$.

(a) Zeige, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und D eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_4)^t$ bestimme $M_D^B(f)$.

(c) Bestimme umgekehrt die Funktionsvorschrift für $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit

$$M_D^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60: Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $B = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von V und $B' = (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ und $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Zeige, dass B' eine Basis von V ist.

(b) Bestimme $M_{B'}^{B'}(f)$, wobei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben ist durch

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 57:

(a) *Voraussetzung.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

Behauptung. Es gilt:

$$\mathrm{rang}(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a = 0, b = 0, \\ 3 & , \text{ falls } a = 0, b \neq 0, \\ 2 & , \text{ falls } a \neq 0, b = 0, \\ 3 & , \text{ falls } a \neq 0, b \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Falls $a = 0$ und $b = 0$, so ist A die Nullmatrix und daher $\mathrm{rang}(A) = 0$. Falls $a = 0$ und $b \neq 0$, so ist A bereits in Zeilen–Stufen–Form und wir lesen direkt $\mathrm{rang}(A) = 3$ ab. Falls $a \neq 0$ und $b = 0$, so verwenden wir Algortihmus 27.12 zur Berechnung des Rangs von A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall hat A also Rang 2. Falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so verwenden wir wieder Algorithmus 27.12 zur Berechnung des Rangs von A:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \longmapsto \dots \longmapsto \begin{pmatrix} a & a & 0 & b \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + ab & ab \end{pmatrix}$$

Da sowohl $a \neq 0$ als auch $b \neq 0$ ist, folgt also $\mathrm{rang}(A) = 3$. $\square$

(b) *Voraussetzung.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Behauptung.

(1) $$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 44 & -58 & 27 \\ 2 & -22 & 30 & -14 \\ 3 & -30 & 40 & -19 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(2) $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Beweis. Wir verwenden Algorithmus 27.15 zur Bestimmung der Inversen der Matrix:

(1) Für A gilt:

$$
\begin{array}{rrrr|rrrr}
 & A & & & & \mathbb{1}_4 & & \\
\hline
1 & 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 5 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-3 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 10 & -8 & 10 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -19 & -8 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -40 & -17 & 10 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -19 & -8 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -19 & -8 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 4 & -4 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -5 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -15 & 20 & -\frac{19}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
1 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -11 & 16 & -\frac{15}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -11 & 15 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -15 & 20 & -\frac{19}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 22 & -29 & \frac{27}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -11 & 15 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -15 & 20 & -\frac{19}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Somit erhalten wir

$$
A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 44 & -58 & 27 \\ 2 & -22 & 30 & -14 \\ 3 & -30 & 40 & -19 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).
$$

□

(2) Für B gilt:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c|}{B} & \multicolumn{4}{c}{\mathbb{1}_4} \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}
$$

Somit erhalten wir

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

$\square$

(c) *Voraussetzung.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Behauptung. Es gilt $\mathrm{NF}(A) = \mathbb{1}_4 = SAT^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Beweis. Mit Hilfe des Normalform–Algorithmus (Algorithmus 27.18) berechnen wir:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr}
\multicolumn{4}{c|}{\mathbb{1}_4} & \multicolumn{4}{c|}{A} & \multicolumn{4}{c}{\mathbb{1}_4} \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -7 & 10 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-11 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-15 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-15 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-15 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-15 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline
\multicolumn{4}{c|}{S} & \multicolumn{4}{c|}{\mathrm{NF}(A)} & \multicolumn{4}{c}{T^{-1}}
\end{array}$$

□

(d) *Voraussetzung.* Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2\,. \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Behauptung. $(3, -\frac{1}{2}, 5)^t$ ist die einzige Lösung obigen (LGS) über $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir berechnen die Lösung des (LGS) mit Hilfe des Algorithmus zur Lösung eines (LGS) (Algorithmus 28.10):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 10 \\ 0 & 14 & 4 & 13 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -1 \end{array}\right)$$

Folglich ist das (LGS) über $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar und wir errechnen die eindeutige Lösung durch Berechnung der reduzierten ZSF:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Somit ist $(3, -\frac{1}{2}, 5)^t$ ist die eindeutige Lösung obigen (LGS) über $\mathbb{R}$. $\square$

(e) *Voraussetzung.* Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

gegeben.

Behauptung. Das (LGS) hat außer $(b, 1, 0)$ genau dann noch weitere Lösungen, wenn $a = 2$ oder $b = 0$ ist. Der Lösungsraum hat in diesen Fällen die Gestalt

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ -2b \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis. Offenbar ist $(b, 1, 0)^t$ eine spezielle Lösung von (LGS). Um alle Lösungen zu finden, genügt es daher, das zugehörige homogene Gleichungssystem (HLGS) zu betrachten. Mit Hilfe des Gauß–Algorithmus angewandt auf (HLGS) erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -2 & b & a \\ 0 & b & a+1 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} -2 & b & a \\ 0 & b & a+1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} =: A$$

1. Fall: $a \neq 2$, $b \neq 0$: In diesem Fall ist $\mathrm{rang}(A) = 3$, d.h. (HLGS) und damit auch (LGS) ist eindeutig lösbar.

2. Fall: $a = 2$ oder $b = 0$: In diesem Fall ist $\mathrm{rang}(A) = 2$, d.h. (HLGS) besitzt einen 1–dimensionalen Lösungsraum. Sei zunächst $b = 0$, so folgt

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist der Lösungsraum von (HLGS) gerade

$$H_0 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei nun $b \neq 0$ und $a = 2$, so folgt

$$\begin{pmatrix} -2 & b & 2 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \dots \quad \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{b} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist der Lösungsraum von (HLGS) gerade

$$H_b = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ -2b \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da im Fall $b = 0$ die Lösungsräume von (HLGS) H_0 und H_b überein stimmen, gilt für den Lösungsraum von (LGS)

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ -2b \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

(f) *Behauptung.* Die Abbildung

$$g : \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^4 \;:\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

ist weder injektiv noch surjektiv.

Beweis. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

erfüllt $g = g_A$ und daher testen wir A mit Hilfe von Algorithmus 27.23 auf Injektivität beziehungsweise Surjektivität. Dazu bestimmen wir den Rang von A mit Hilfe von Algorithmus 27.12, d.h. wir überführen A in ZSF:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \dots \quad \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt $\mathrm{rang}(A) = 3 < 4 = n = m$ und damit ist g weder injektiv noch surjektiv. □

(g) *Voraussetzung.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$

Behauptung. $\big((1,0,-1,-1,-1)^t, (0,1,1,1,1)^t, (0,0,1,0,-1)^t, (0,0,0,1,1)^t\big)$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}(f_A)$ und $\big((-1,1,-1,1-1)^t\big)$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_A)$.

Beweis. Wir bestimmen das Bild von f_A mit Hilfe von Algorithmus 27.27 durch Überführen von A^t in ZSF:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \dots \quad \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\big((1,0,-1,-1,-1)^t, (0,1,1,1,1)^t, (0,0,1,0,-1)^t, (0,0,0,1,1)^t\big)$ eine Basis von $\mathrm{Im}(f_A)$.

Wir bestimmen nun den Kern von f_A mit Hilfe von Algorithmus 28.12 beziehungsweise Algorithmus 28.10:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \dots \quad \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\big((-1,1,-1,1-1)^t\big)$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_A)$. □

(h) *Voraussetzung.* Seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ gegeben.

Behauptung.

(1) $\det(A) = -4$.

(2) $\det(B) = 0$.

(3) $\det(C) = 24$.

Beweis.

(1) Nach Beispiel 30.2(b) ist die Determinante einer 2×2-Matrix gerade das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Elemente der Nebendiagonalen, also

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - (-4) \cdot (-3) = -4.$$

□

(2) Nach Beispiel 30.2(c) lässt sich die Determinante einer 3×3-Matrix mit Hilfe der *Regel von Sarrus* berechnen. Damit folgt

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot 3 + 0 + 0 - (-1) \cdot 5 \cdot 3 - 0 - 0 = 0.$$

□

(3) Nach Proposition 30.3 ist die Determinante einer (oberen) Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente, also

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

□

Aufgabe 58:

(a) *Voraussetzung.* Sei $U = \langle (1,2,3,4)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$.

Behauptung. $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

Beweis. Sei $U = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle (1,2,3,4)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und B die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Die Erzeuger von U sind linear unabhängig und wir bestimmen daher mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz (Algorithmus 28.19) eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die die Erzeuger von U enthält. Sei dazu A die 4×4–Einheitsmatrix. Nun bilden wir die erweiterte Matrix (A, u_1) und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist bereits in ZSF. Da der erste Eintrag in der letzten Spalte nicht Null ist, streichen wir aus B den Vektor e_1 und fügen u_1 als letzten Vektor ein. Wir erhalten die neue Basis

$$B = (e_2, e_3, e_4, u_1).$$

Sei nun A die Matrix, deren Spalten die Vektoren aus B sind, und wir bilden analog die erweiterte Matrix (A, u_2) und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wieder ist der erste Eintrag der letzten Spalte nicht Null, so dass wir den ersten Vektor in B, das ist e_2, streichen und u_2 am Ende einfügen. Wir erhalten also $B = (e_3, e_4, u_1, u_2)$ und nach Bemerkung 28.21 ist damit $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$. □

(b) *Voraussetzung.* Sei $U = \{(a_1, \ldots, a_5)^t \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 - 2a_2 = 0 = 2a_4 + a_5\} \leq \mathbb{R}^5$.

Behauptung. $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ und $B = \big((0,0,1,0,0)^t, (0,0,0,-1,2)^t, (2,1,1,-1,2)^t\big)$ ist eine Basis von U, die den Vektor $(2,1,1,-1,2)^t$ enthält.

Beweis. Zur Bestimmung der Dimension von U sowie einer Basis von U müssen wir das (LGS)

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 &= 0 \\ 2a_4 + a_5 &= 0 \end{aligned}$$

lösen, also den Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $B' = \big((-2,-1,0,0,0)^t,(0,0,-1,0,0)^t,(0,0,0,\frac{1}{2},-1)^t\big)$ beziehungsweise $B'' = \big((2,1,0,0,0)^t,(0,0,1,0,0)^t,(0,0,0,1,-2)^t\big)$ eine Basis von U, also $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$.

Mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz (Algorithmus 28.19) erhalten wir nun eine Basis B von U, die den Vektor $v = (2,1,1,-1,2)^t$ enthält. Dazu sei A die Matrix, deren Spalten die oben bestimmten Basisvektoren B'' sind, und wir bilden die erweiterte Matrix (A,v) und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der erste Eintrag der letzten Spalte ist von Null verechieden, also streichen wir b_1'' und ersetzen diesen durch v. Damit erhalten wir die Basis

$$B = \big((0,0,1,0,0)^t,(0,0,0,-1,2)^t,(2,1,1,-1,2)^t\big)$$

von U, die den Vektor $(2,1,1,-1,2)^t$ enthält. □

(c) *Voraussetzung.* Seien die Unterräume $U = \langle(1,0,1,1)^t,(-1,1,0,0)^t\rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle(1,0,1,0)^t,(1,1,1,1)^t\rangle \leq \mathbb{R}^4$ gegeben.

Behauptung. $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$.

Beweis. Wir testen die Familie $F = \big((1,0,1,1)^t,(-1,1,0,0)^t,(1,0,1,0)^t,(1,1,1,1)^t\big)$ auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe von Algorithmus 27.26 beziehungsweise Algorithmus 27.12 zur Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \dots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\operatorname{rang}(A) = 4$, d.h. F ist linear unabhängig mit $|F| = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. Somit ist F nach Korollar 25.7 eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Da zudem $U + U' = \langle F\rangle$ und $U \cap U' = \{0\}$ gilt, da F linear unabhängig ist, folgt $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$. □

(d) *Voraussetzung.* Sei $V = \mathbb{F}_5^3$, $U = \{(x+y,y,y-x)^t \mid x,y \in \mathbb{F}_5\}$ und $U' = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{F}_5^3 \mid z = 2x+y\}$.

Behauptung.

(1) $B_1 = \big((1,0,-1)^t,(0,1,2)^t,(0,0,1)^t\big)$ ist eine Basis von $U + U'$.

(2) $B_2 = \big((2,1,0)^t\big)$ ist eine Basis von $U \cap U'$.

(3) $B_3 = (\overline{e}_3)$ ist eine Basis von V/U.

(4) $B_4 = (\overline{e}_3)$ ist eine Basis von V/U'.

Beweis. Zunächst ist offensichtlich $F = \big((1,0,-1)^t,(1,1,1)^t\big)$ eine Basis von U. Eine Basis von U' erhalten wir durch Bestimmung von $\operatorname{Ker}(f_A)$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Vektoren in der zweiten und dritten Spalte eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_A)$, also $F' = \big((3,-1,0)^t, (2,0,-1)^t\big)$ eine Basis von U'.

(1) Mit Hilfe von Algorithmus 27.25 berechnen wir eine Basis von $U + U' = \langle F \cup F' \rangle$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $B_1 = \big((1,0,-1)^t, (0,1,2)^t, (0,0,1)^t\big)$ ist eine Basis von $U + U'$. □

(2) Wir bestimmen $U \cap U'$ mit Hilfe von Algorithmus 28.24. Dazu bestimmen wir zunächst A und A' gemäß Algorithmus 28.22, so dass $U = \mathrm{Lin}(F) = \mathrm{Lös}(A, 0)$ und $U' = \mathrm{Lös}(A', 0)$.

Nun ist $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ bereits per Definition von U' gegeben. Auf der anderen Seite bilden wir die 2×3–Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen ihren Kern gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Vektor in der dritten Spalte eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_M)$ und wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden nun aus den Zeilen von A und A' eine gemeinsame Matrix

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen eine Basis B_2 von $\mathrm{Ker}(f_{A''})$ gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist die zweite Spalte und damit auch $B_2 = \big((2,1,0)^t\big)$ eine Basis von $U \cap U'$. □

(3) Sei B die Standardbasis des $\mathbb{F}_5^3$. Die Basis F von U ist linear unabhängig und wir bestimmen daher mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz (Algorithmus 28.19) eine Basis des $\mathbb{F}_5^3$, die F enthält. Sei dazu A die 3×3–Einheitsmatrix. Nun bilden wir die erweiterte Matrix (A, u_1) und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist bereits in ZSF. Da der erste Eintrag in der letzten Spalte nicht Null ist, streichen wir aus B den Vektor e_1 und fügen u_1 als letzten Vektor ein. Wir erhalten die neue Basis

$$B = (e_2, e_3, u_1).$$

Sei nun A die Matrix, deren Spalten die Vektoren aus B sind, und wir bilden analog die erweiterte Matrix (A, u_2) und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wieder ist der erste Eintrag der letzten Spalte nicht Null, so dass wir den ersten Vektor in B, das ist e_2, streichen und u_2 am Ende einfügen. Wir erhalten also $B = (e_3, u_1, u_2)$ und nach Bemerkung 28.21 ist damit $B_3 = (\overline{e}_3)$ eine Basis von V/U. □

(4) Sei B die Standardbasis des $\mathbb{F}_5^3$. Die Basis F' von U' ist linear unabhängig und wir bestimmen daher mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz (Algorithmus 28.19) eine Basis des $\mathbb{F}_5^3$, die F' enthält. Sei dazu A die 3×3–Einheitsmatrix. Nun bilden wir die erweiterte Matrix (A, u_1') und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist bereits in ZSF. Da der erste Eintrag in der letzten Spalte nicht Null ist, streichen wir aus B den Vektor e_1 und fügen u_1' als letzten Vektor ein. Wir erhalten die neue Basis

$$B = (e_2, e_3, u_1').$$

Sei nun A die Matrix, deren Spalten die Vektoren aus B sind, und wir bilden analog die erweiterte Matrix (A, u_2') und überführen diese in reduzierte ZSF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wieder ist der erste Eintrag der letzten Spalte nicht Null, so dass wir den ersten Vektor in B, das ist e_2, streichen und u_2' am Ende einfügen. Wir erhalten also $B = (e_3, u_1', u_2')$ und nach Bemerkung 28.21 ist damit $B_4 = (\overline{e}_3)$ eine Basis von V/U'. □

(e) *Voraussetzung.* Seien $U = \langle (2,-1,1,-1)^t, (1,-2,2,1)^t, (3,-1,0,2)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (3,-2,3,8)^t, (2,1,-5,3)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ gegeben.

Behauptung. $B = \big((-8,1,5,-17)^t\big)$ ist eine Basis von $U \cap U'$.

Beweis. Sei $F := \big((2,-1,1,-1)^t, (1,-2,2,1)^t, (3,-1,0,2)^t\big)$ die Famile der Erzeuger von U und $F' := \big((3,-2,3,8)^t, (2,1,-5,3)^t\big)$ die Familie der Erzeuger von U'. Dann bestimmen wir den Durchschnitt $U \cap U'$ mit Hilfe von Algorithmus 28.24.

Dazu bestimmen wir zunächst A und A' gemäß Algorithmus 28.22, so dass $\mathrm{Lin}(F) = \mathrm{Lös}(A, 0)$ und $\mathrm{Lin}(F') = \mathrm{Lös}(A', 0)$. Wir bilden daher die 3×4–Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und berechnen ihren Kern gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Vektor in der vierten Spalte eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_M) = \mathrm{Lös}(M, 0)$ und wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden nun die 2×4–Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

und berechnen ihren Kern gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Vektoren in der dritten und vierten Spalte eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_{M'}) = \mathrm{Lös}(M', 0)$ und wir erhalten

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden nun aus den Zeilen von A und A' eine gemeinsame Matrix

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen eine Basis B von $\mathrm{Ker}(f_{A''})$ gemäß Algorithmus 28.12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \ldots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist die vierte Spalte und damit auch

$$B = \left((-8, 1, 5, -17)^t\right)$$

eine Basis von $U \cap U'$. $\square$

Aufgabe 59:

Voraussetzung. Seien $B = \big((1,1,1,1)^t, (-1,0,0,1)^t, (0,-1,0,1)^t, (0,0,-1,1)^t\big)$ und $D = \big((1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (0,0,1)^t\big)$.

Behauptung.

(a) B ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und D ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_4)^t$ gilt

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit

$$M_D^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

gilt $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_2,\ \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4,\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4\right)^t$.

Beweis.

(a) Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit von B beziehungsweise D mit Hilfe von Algorithmus 27.26:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \cdots \quad \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\mathrm{rang}(A_B) = 4$, d.h. B ist linear unabhängig und wegen $|B| = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ ist B nach Korollar 25.7 eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\mathrm{rang}(A_D) = 3$, d.h. D ist linear unabhängig und wegen $|D| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ ist D nach Korollar 25.7 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. $\square$

(b) Wir bestimmen mit Hilfe von Algorithmus 28.16 die Matrixdarstellung $M_D^B(f)$ von f. Dazu berechnen wir zunächst $f(B)$, also

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f\big((1,1,1,1)^t\big) = (0,1,2)^t, \\ f(b_2) &= f\big((-1,0,0,1)^t\big) = (-1,0,1)^t, \\ f(b_3) &= f\big((0,-1,0,1)^t\big) = (1,0,0)^t, \\ f(b_4) &= f\big((0,0,-1,1)^t\big) = (0,-1,1)^t \end{aligned}$$

und anschließend

$$\begin{array}{ccc|cccc} & D & & & f(B) & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline & \mathbb{1}_3 & & & M_D^B(f) & & \end{array}$$

Somit gilt

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

(c) Sei $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit

$$M_D^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Bilder der Basisvektoren in B unter g

$$g(b_1) = g\big((1,1,1,1)^t\big) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$g(b_2) = g\big((-1,0,0,1)^t\big) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g(b_3) = g\big((0,-1,0,1)^t\big) = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$g(b_4) = g\big((0,0,-1,1)^t\big) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ beliebig, dann müssen wir den Koordinatenvektor von x bezüglich B bestimmen, also das folgenden (LGS) mit Hilfe von Algorithmus 28.10 lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \longmapsto \cdots \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4) \end{array}\right)$$

Da g eine lineare Abbildung ist, erhalten wir damit die Funktionsvorschrift von g als

$$
\begin{aligned}
&g(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= g\left(\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}(-3x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right.\\
&\qquad\left. +\frac{1}{4}(x_1-3x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x_1+x_2-3x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot g\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{4}(-3x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot g\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad + \frac{1}{4}(x_1-3x_2+x_3+x_4)\cdot g\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{4}(x_1+x_2-3x_3+x_4)\cdot g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{4}(-3x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&\quad + \frac{1}{4}(x_1-3x_2+x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x_1+x_2-3x_3+x_4)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \left(x_2,\ \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4,\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4\right)^t.
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 60:

Voraussetzung. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $B = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von V und $B' = (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ und $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

Behauptung.

(a) B' ist eine Basis von V.

(b) Für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

gilt

$$M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2b & b & -a + 2b \\ 0 & -b & -b \\ a - b & a & 2a \end{pmatrix}.$$

Beweis.

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \lambda_3 \cdot y_3 = \lambda_1 \cdot (x_1 + x_3) + \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2) + \lambda_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Dann gilt auch

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot x_2 + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot x_3 = 0,$$

also $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_3 = 0$ und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, da B eine Basis von V ist. Folglich ist B' linear unabhängig mit $|B'| = 3 = |B| = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ und somit nach Korollar 25.7 eine Basis von V. $\square$

(b) Nun ist nach Bemerkung 26.7 die i–te Spalte von $T_B^{B'}$ der Koordinatenvektor von y_i bezüglich B und daher offensichtlich

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren gilt ebenfalls nach Bemerkung 26.7, dass $T_{B'}^{B} = (T_B^{B'})^{-1}$, so dass wir $T_{B'}^{B}$ als Inverse von $T_B^{B'}$ mit Hilfe von Algorithmus 27.15 bestimmen können.

$T_B^{B'}$			$\mathbb{1}_3$		
1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	−1	0	−1	0	1
1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	−1	1	1
1	1	0	2	−1	−1
0	1	0	1	0	−1
0	0	1	−1	1	1
1	0	0	1	−1	0
0	1	0	1	0	−1
0	0	1	−1	1	1
$\mathbb{1}_3$			$T_{B'}^{B}$		

Hieraus ergibt sich also

$$T^B_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte hierbei, dass man $T^B_{B'}$ natürlich auch auf analoge Weise wie $T^{B'}_B$ bestimmen kann. So ist beispielsweise $x_1 = y_1 + y_2 - y_3$.

Schließlich erhalten wir $M^{B'}_{B'}(f)$ per Basiswechsel gemäß Satz 26.8 als

$$\begin{aligned} M^{B'}_{B'}(f) &= T^B_{B'} \circ M^B_B(f) \circ T^{B'}_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a+b & a & a+b \\ a-b & a-b & 2a-b \\ a+b & a+b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b & b & -a+2b \\ 0 & -b & -b \\ a-b & a & 2a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$