Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 3

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 04.05.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 12 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 9: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \; x \longmapsto 3x - 2.$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : \; x \longmapsto 3x - 2.$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \; (x, y) \longmapsto 5x + 3y.$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; (x, y) \longmapsto (y, x^2 + y).$

Aufgabe 10: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$

(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2).$

Finde zudem Beispiele, bei denen in (b) und (c) die Inklusionen echt sind.

Aufgabe 11:

(a) Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:
f ist genau dann injektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : X \longrightarrow M$ und $h : X \longrightarrow M$ mit $f \circ g = f \circ h$ folgt, dass $g = h$ ist.

(b) Es seien M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Zeige, es gibt keine surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Aufgabe 12: Beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.