Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2015, Blatt 4
Thomas Markwig | Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 11.05.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13:

a. Zeige, dass $5^n + 7$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist.

b. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cdot k^2 = \binom{n+1}{2}.$$

Aufgabe 14:

a. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren $a \sim b$ genau dann, wenn $a - b \in \mathbb{Z}$ ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist. Was ist die Äquivalenzklasse von 5?

b. Seien $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0\}$. Wir definieren

$$(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ a \cdot v_1 = w_1 \ \wedge \ a \cdot v_2 = w_2$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und zeichne die Äquivalenzklassen zu $(1, 1)$ und $(-2, 3)$ in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein.

Aufgabe 15: Sei M eine Menge und betrachte folgende beide Mengen von Abbildungen:

$$A := \{f \mid f : \{0, 1\} \to M \text{ Abbildung}\} \text{ und } B := \{g \mid g : M \to \{0, 1\} \text{ Abbildung}\}.$$

Zeigen Sie:

a. A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.

b. B ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

c. Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.

d. Ist M abzählbar unendlich, so ist B überabzählbar.

Aufgabe 16:

a. Beweise, dass die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \big\{(0, 0)\big\}$ zusammen mit der Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $(a, a'), (b, b') \in M$ eine Gruppe definiert.

b. Beweise, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$+ : \ (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

und

$$\cdot : \ (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Körper ist.