Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 5

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 18.05.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17:

a. Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

$$\text{(i)}\ \ z = 5i - 1 \qquad \text{(ii)}\ \ z = \frac{4+2i}{2-2i} \qquad \text{(iii)}\ \ z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^4}$$

b. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen:

$$\text{(i)}\ \ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w} \qquad \text{(ii)}\ \ z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{(iii)}\ \ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \leq |z|$$

Aufgabe 18:

a. Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Ist $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $0 < x^n$.

(ii) Ist $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so gilt $(x < y \iff x^n < y^n)$.

b. Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge $A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 19:

a. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \ \text{ und } \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a) \right)$$

b. Untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 20:

a. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(i) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(ii) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

b. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{3n^4+2n^2}{2n^5+4n^3+8}$.

(ii) $a_n = \frac{5n^4+2n^2}{2n^3+3} - \frac{10n+1}{4}$.

(iii) $a_n = \frac{n!}{2^n}$.