Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 6
Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Freitag, 22.05.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden. Für Fernstudenten ist der Abgabetermin am Dienstag, den 26.05.2015 um 12:00 Uhr.

Aufgabe 21:

a. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

$$(1)\ a_n = \frac{(2n^2+3)\cdot\sin(n)}{5\cdot\binom{n}{3}}, \quad (2)\ a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}, \quad (3)\ a_0 \in [1,3), a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}.$$

b. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz. Die Berechnung der Grenzwerte im Falle der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{in}$.

c. Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 22: Zeige die folgenden Aussagen:

a. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

b. Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent.

c. Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein.

Wie nennen den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Eulersche Zahl* e.

Aufgabe 23: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Zeige: existiert eine Zahl $c \in (0,1)$ mit

$$a_{n+1} \leq c \cdot a_n + b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Aufgabe 24: Betrachte die Menge $M := \{z \in \mathbb{N} \mid z \text{ enthält nicht die Ziffer } 9\}$ bzw. die natürliche Aufzählung ihrer Elemente nach ihrer Größe $M = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konvergiert.