Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 7
Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 01.06.2015, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 25:

a. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen über $\mathbb{R}$.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \cdot t^n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n^2+1}\right)^n \cdot t^n$$

und untersuche die Reihe in (i) auf Konvergenz in den Randpunkten.

b. Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produkts $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$

Aufgabe 26:

a. Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

Hinweis: Schaut euch den Beweis von Lemma 12.29 an.

b. Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

c. Gilt für $x \in \mathbb{K}$ stets: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ konvergent?

Aufgabe 27:

a. Bestimme für die nachfolgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

$$\text{(i)} \quad M_1 = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad M_2 = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

b. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$.

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}\right)$.

Aufgabe 28:

a. Verwendie die ε-δ-Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{1-x^3}$ stetig in $[0,1]$ ist.

b. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.

c. Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die nur in einem Punkt stetig ist.