Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 08.06.2015, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 29:

a. Zeige, ist $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ stetig, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$.

b. Zeige, ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.
Gilt die Aussage auch noch, wenn f nicht stetig ist?

Aufgabe 30: Zeige, die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 31:

a. Finde eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0, 1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

b. Zeige, eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

c. Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{x}{n}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 32:

a. (i) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

(ii) Folgere unter der Voraussetzung, dass $\arctan(x) + \arctan(y)$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegt, das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

(iii) Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b. Zeige für $x, y > 0$ und $a > 1$ die Ungleichung

$$\frac{\log_a(x) + \log_a(y)}{2} \le \log_a\left(\frac{x + y}{2}\right).$$