Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 10

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 22.06.2015, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 37:

a. Berechne die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\cos(x)-x}{4x^2+x^3}$ (2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$, $x>1$ (3) $\lim_{x\to 0} x^x$, $x>0$

b. Berechne das vierte Taylorpolynom $T^4_{f,0}$ mit Entwicklungspunkt $a=0$ für

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto e^{4x^4+x}.$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!

c. Berechne das dritte Taylorpolynom $T^3_{\arctan,0}$.

d. Benutze $T^3_{\arctan,0}$ und Aufgabe 32, um $\frac{\pi}{4}$ und damit π näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit $\pi = 3,14\ldots$.

Aufgabe 38:

a. Es sei $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x}{1+n\cdot x^2}$ für $n\in\mathbb{N}$. Untersuche $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R}$. Gilt $\lim_{n\to\infty} f'_n = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$?

b. Finde eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ konvergiert, so daß aber die Folge der Ableitungen $f'_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ nicht mal punktweise konvergiert.

Aufgabe 39: Sei $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig und $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so daß $|f^{(n)}(x)|\leq g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dann ist $f(x)=T_{f,0}(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Hinweis, zu gegebenem $0\neq x\in\mathbb{R}$ betrachte man f und g als Funktionen auf dem Intervall $\big[-|x|,|x|\big]$.

Aufgabe 40: Sei

$$f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R},\ x\longmapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Für $x\neq 0$ und für alle $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es Polynome $p_n(x)$ und $q_n(x)=x^{3\cdot 2^{n-1}}$, so daß gilt $f^{(n)}(x)=\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\cdot\exp(-\frac{1}{x^2})$.

(2) Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x^k}=0$.

(3) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0)=0$.

(4) $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $T_{f,0}=0$.