Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 11

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 29.06.2015, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 41:

a. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$, $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ eine Zerlegung und $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ Zwischenpunkte. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) $ZS(f, Z_n, \alpha^n) = (e-1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}$ für $y = \frac{1}{2^n}$.

(2) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$.

(3) Berechne $\int_0^1 e^x dx$ mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil (1).

b. Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(1) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx$ für $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx$,

(3) $\int \frac{1}{\sin(x)}\, dx$, substituiere $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(4) $\int \frac{2x^5+7x^4+9x^3+9x^2+6x-5}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}\, dx$.

Aufgabe 42: Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in (0,1)$ mit $\int_0^1 f(x) \cdot x^2\, dx = \frac{f(c)}{3}$.

Aufgabe 43: Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^b f(x) \cdot \sin(y \cdot x)\, dx.$$

Zeige mit Hilfe partieller Integration $\lim\limits_{y \to \infty} g(y) = 0$ und $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = 0$.

Aufgabe 44: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktionen

$$f_n : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

und

$$F_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

.

a. Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-\pi}{2}$.

b. Zeige, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall $[\delta, 2\pi-\delta]$ gleichmäßig gegen f.

c. Zeige, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen

$$F : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

d. Bestimme mit Hilfe von c. den Wert der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Hinweis, in Teil a. darf die Formel aus Aufgabe 12.49 im Skript ohne Beweis verwendet werden; zudem sollte man Aufgabe 43 verwenden. Für b. sollte man sich an den Zusammenhang von $\sin(x)$ und e^{ix} erinnern. In Teil c. wird man unter anderem $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx$ für $k \in \mathbb{N}$ benötigen.