Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 12
Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 06.07.2015, 12:00

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten und einzureichen, eine der Aufgaben wird jedoch nicht von den Übungsleitern korrigiert, sondern nur in der Übung besprochen.

Aufgabe 45:

a. Berechne den Wert des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$.

b. Untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x \cdot e^{-tx} \, dx$ konvergiert und bestimme für diese den Wert des Integrals.

Aufgabe 46:

a. Sei $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot f(x) = r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Zeige, daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) \, dx$ konvergent ist.

b. Zeige mit Hilfe des Integralkriteriums für Reihen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} \right)$$

für jedes $y \in (0, \infty)$ konvergiert.

Aufgabe 47:

a. Zeige, $A(x+y) = Ax+Ay$ und $f_{A+B} = f_A+f_B$ für $x, y \in K^n$ und $A, B \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$.

b. Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

c. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
Zeige, f ist genau dann K-linear, wenn $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ für alle $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt.

d. Zeige, daß $\big(\mathrm{Gl}_n(K), \circ\big)$ eine Gruppe ist, die für $n > 1$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 48: Welche der folgenden Teilmengen von K^3 sind Unterräume des K^3? Begründe Deine Anworten.

a. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in K^3 \mid x_1 - x_2 = x_3^2\}$ für $K = \mathbb{R}$ oder für $K = \mathbb{F}_2$.

b. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$ für $K = \mathbb{R}$.

c. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a^2\}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$ für $K = \mathbb{R}$.

d. $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (1, 1, 0)^t, (0, 0, 0)^t\}$ für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.