Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2015, Blatt 13
Thomas Markwig | Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 13.07.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 52 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 49: Es sei $N = (n_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, für die die Einträge auf der oberen Nebendiagonale alle 1 sind und für die alle anderen Einträge 0 sind, d.h. $n_{ij} = \delta_{j-i,1}$. Zeige für $k = 1, \ldots, n$, daß die Einträge der Matrix $N^k = \left(n_{ij}^{(k)}\right)$ auf der k-ten oberen Nebendiagonale alle 1 und alle anderen Einträge 0 sind, d.h. $n_{ij}^{(k)} = \delta_{j-i,k}$. Insbesondere ist $N^n = 0$ und $N^k \neq 0$ für $k < n$.

Aufgabe 50: Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $U, U' \leq V$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a. Zeige, $U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'$.

b. Zeige, falls $f^2 = f$ gilt, so gilt auch $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

c. Zeige, falls $f(U) \subseteq U$ gilt, so werden durch $f_U : U \longrightarrow U : x \mapsto f(x)$ und $f_{V/U} : V/U \longrightarrow V/U : \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$ K-lineare Abbildungen definiert.

d. Zeige, $\mathrm{Hom}_K(V, W) \leq W^V$.

Aufgabe 51:

a. Welche der folgenden Familien sind linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen von K^2 für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{F}_5$?

(1) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right)$ (2) $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)$ (3) $\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ (4) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$

b. Es seien je $n-1$ der Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear unabhängig.
Zeige, ist die Familie $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.

c. Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung, F eine Familie von Vektoren in V, so ist $f\big(\mathrm{Lin}(F)\big) = \mathrm{Lin}\,\big(f(x) \mid x \in F\big)$.

d. Es seien $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume eines K-Vektorraums V mit Basen $B_1, \ldots, B_k$.
Zeige, genau dann ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ die direkte Summe der U_i, wenn $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 52:

a. Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 6$, und U und U' Unterräume mit $\dim_K(U) = 5$ und $\dim_K(U') = 3$.

(i) Welche Werte kann $\dim_K(U \cap U')$ annehmen?

(ii) Gib für jeden der Werte von $\dim_K(U \cap U')$ ein Beispiel (K, V, U, U') an.

b. Es sei $B := \big((2, 0, 3)^t, (1, 2, 1)^t, (4, 2, 1)^t\big)$.

(i) Zeige, B ist eine Basis von $\mathbb{F}_5^3$.

(ii) Ersetze *mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(3, 3, 2)^t$ und $(1, 1, 3)^t$.