Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 14

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 20.07.2015, 12:00

Aufgabe Nummer 56 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 53: Seien V und W zwei K-Vektorräume, $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und B eine Basis von V.

(a) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(b) Genau dann ist f injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.

(c) Genau dann ist f bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 54:

(a) Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ bezeichne $\mathrm{ZR}(A)$ die lineare Hülle der Zeilen von A und $\mathrm{SR}(A)$ die lineare Hülle der Spalten von A.
Zeige für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, $S \in \mathrm{Gl}_m(K)$ und $T \in \mathrm{Gl}_n(K)$, dass

$$\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(SA) \quad \text{und} \quad \mathrm{SR}(A) = \mathrm{SR}(AT).$$

(b) Sei V ein K-Vektorraum mit $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$ und $g \in \mathrm{End}_K(V)$.
Zeige, es gibt eine Zahl $0 \leq k \leq n$, so daß für alle $i \geq 1$ gilt

$$\mathrm{Ker}(g^0) \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^1) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(g^{k+i}).$$

Aufgabe 55: Betrachte den Vektorraum $P_n := \left\{\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid a_k \in K\right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n (siehe Skript Beispiel 22.6) mit Basis $B = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$ und die formale Ableitung

$$d : P_n \longrightarrow P_n : \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

(a) Zeige, daß d eine K-lineare Abbildung ist.

(b) Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

(c) Zeige, dass im Fall $n = 3$ auch $D = (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne die Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.

Aufgabe 56:

(a) Bestimme den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 4, \mathbb{F}_5) \text{ und } B_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}) \text{ für } t \in \mathbb{Q}.$$

(b) Finde einen K-Vektorraum V sowie zwei K-lineare Abbildungen $f, g : V \longrightarrow V$, so dass Folgendes gilt:

(1) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(2) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.