

Grundlagen der Mathematik 1

Unten findet Ihr weitere Aufgaben zum Üben der Inhalte der Vorlesung. Ausgearbeitete Lösungen werden wir für diese nicht zur Verfügung stellen.

Aufgabe 61:

- (a) Zeige, dass $\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.
- (b) Zeige, dass $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
- (c) Skizziere die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

und begründe dabei alle „wesentlichen qualitativen Merkmale“ des Funktionsgraphen.

Aufgabe 62: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über \mathbb{R} mit Konvergenzradius $r > 0$, so dass $f(r)$ konvergiert. Zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ ist

$$f(r) - f(x) = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (f(r) - f_n(r)) \left(\frac{x}{r}\right)^n,$$

wobei $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ die Partialsummen von f bezeichnet.

- (b) f ist stetig auf $(-r, r]$.

Aufgabe 63: Berechne die folgenden Grenzwerte reeller Funktionen:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} ((\cos(x) - 1) \cdot \ln(x))$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\ln(x)}$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$.

Aufgabe 64: Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ genau dann in \mathbb{R} existiert, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a, b) : (|x - a| < \delta \text{ und } |y - a| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Aufgabe 65:

- (a) Berechne die Taylor-Entwicklung von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\tan(x^2)}$ im Punkt 0 bis zum Grad 4.
- (b) Berechne für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\exp(x^3) \cdot \sin(x)}{1+x^5}$ das fünfte Taylor-Polynom $T_{f,0}^5$ um 0.
HINWEIS: Ihr solltet hier mit etwas Überlegung die Berechnung aller fünf Ableitungen von f vermeiden.
- (c) Berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{x}$ das zweite Taylor-Polynom $T_{f,1}^2$ mit Entwicklungspunkt 1 und gib eine Abschätzung für das Restglied $|f(x) - T_{f,1}^2(x)|$ im Intervall $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ an.

Aufgabe 66: Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{a}{n} := \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun die Funktion $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^a$. Zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ und konvergiert (mindestens) auf $(-1, 1)$.
- (b) Es gilt $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ für alle $x \in (-1, 1)$, d.h. die Taylor-Reihe stellt auf diesem Intervall die ursprüngliche Funktion dar.
HINWEIS: Berechne die Ableitung von $\frac{T_{f,0}}{f}$.
- (c) Zeige durch Differenzieren und anschließendes Integrieren, dass sich die Funktion \arcsin auf $(-1, 1)$ als Potenzreihe schreiben lässt. Berechne diese Potenzreihe explizit.

Aufgabe 67: Berechne die folgenden Ableitungen:

- (a) $\left(\frac{\ln(x)}{e^x}\right)'$ für $x > 0$.
- (b) $\left(\frac{x^2-2x+1}{x+2}\right)'$ für $x \neq -2$.
- (c) $(\ln(\ln(x)))'$ für $x > 1$.
- (d) $\left(\ln(\sqrt{1+\cos(x)})\right)'$ für $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 68: Seien $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = c \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a := f(0)$. Zeige, dass $f(x) = a \cdot e^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 69: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass f stetig in x_0 und g differenzierbar in x_0 ist mit $g(x_0) = 0$. Zeige, dass das Produkt $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 ist mit $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Aufgabe 70: Entscheide, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot |x|$ differenzierbar ist.

Aufgabe 71: Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & \text{falls } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Begründe, dass f an jeder Stelle $x_0 \in (0, 1]$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung $f'(x_0)$. Zeige außerdem, dass f in 0 nicht differenzierbar ist.
- (b) Zeige, dass g differenzierbar ist und bestimme die Ableitungsfunktion $g' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 72: Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f_{a,b} : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{a,b}(x) := x^3 + ax^2 + bx$ (in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$).

HINWEIS: Denke an die Randpunkte $-10, 10$ des Intervalls.

Aufgabe 73:

- (a) Berechne die Stammfunktionen $\int^y \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx$ und $\int^y \frac{1}{1+e^x} dx$.
- (b) Zeige, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 74:

- (a) Sei $f(x) = \frac{p(x)}{(x-a_1) \cdot \dots \cdot (x-a_n)}$ eine reelle rationale Funktion, bei der p eine Polynomfunktion vom Grad kleiner als n ist und die a_1, \dots, a_n alle verschieden sind. Zeige, dass

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x-a_i} \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{p(a_i)}{(a_i-a_1) \cdot \dots \cdot (a_i-a_{i-1}) \cdot (a_i-a_{i+1}) \cdot \dots \cdot (a_i-a_n)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ gilt.

- (b) Berechne die Stammfunktion $\int^y \frac{x^3+x^2+1}{x^3-x} dx$ mit Hilfe von (a).

Aufgabe 75:

- (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die drei Vektoren $(1, 3, 4)^t, (3, a, 11)^t, (-1, -4, 0)^t \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig? Begründe Deine Aussage.
- (b) Zeige, dass $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum des \mathbb{R}^3 ist und bestimme eine Basis von U .

Aufgabe 76: Gegeben seien die folgenden Teilmengen des \mathbb{Q} -Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$:

- (a) $U_1 = \{(x, x+1, x+2, x+4)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,
- (b) $U_2 = \{(x, 2x, 3x, 4x)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,
- (c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}, x_3 = x_1 + x_2, x_4 = x_2 + x_3\}$,
- (d) $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}, x_2 \geq 0\}$,
- (e) $U_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$.

Welche dieser Mengen sind Unterräume von V ? Begründe Deine Aussage.

Aufgabe 77: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^5$ der von den Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (4, 1, 1, 0, -2)^t, & v_2 &= (0, 1, 4, -1, 2)^t, & v_3 &= (4, 3, 9, -2, 2)^t, \\ v_4 &= (1, 1, 1, 1, 1)^t, & v_5 &= (0, -2, -8, 2, -4)^t \end{aligned}$$

aufgespannte Unterraum. Bestimme eine Basis von U und ergänze diese zu einer Basis von \mathbb{R}^5 .

Aufgabe 78: Seien die Matrizen $A \in \text{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \text{Mat}(m \times n, K)$ gegeben. Zeige, dass $\text{rang}(B \circ A) \leq \min \{ \text{rang}(A), \text{rang}(B) \}$.

Aufgabe 79:

- (a) Eine Relation $R \in M \times M$ auf einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, wobei Letzteres bedeutet, dass aus $(a, b) \in R$ stets $(b, a) \in R$ folgt. Zeige, dass die Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $\text{Mat}(m \times n, K)$ ist.
- (b) Seien $0 \neq \lambda \in K$, $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Dann gelten: $Q_i^j(\lambda) = S_j(\lambda^{-1}) \circ Q_i^j(1) \circ S_j(\lambda)$, und $P_i^j = Q_j^i(1) \circ Q_i^j(-1) \circ Q_j^i(1) \circ S_j(-1)$.

Aufgabe 80: Sei $B := ((3, 5, 2)^t, (1, 1, -1)^t, (2, 4, 1)^t)$.

- (a) Zeige, B ist eine Basis von \mathbb{R}^3 .
- (b) Ersetze mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(1, 3, 2)^t$ und $(-2, 1, 2)^t$.

Aufgabe 81: Es sei K ein Körper. $U := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 = \dots = a_n \in K\}$ und $U' := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K, \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$ sind Unterräume des K^n . Bestimme $\dim_K(U)$, $\dim_K(U')$, $\dim_K(U \cap U')$ und $\dim_K(U + U')$.

Aufgabe 82: Bestimme die Matrixdarstellung $M_{B'}^B(f)$ der \mathbb{R} -linearen Abbildung

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mapsto (x_1 - x_2, x_2 + x_4, x_1)^t$$

bezüglich der Basen $B = ((1, 0, 0, -1)^t, (0, 1, 0, -1)^t, (0, 0, 1, -1)^t, (0, 0, 0, 1)^t)$ von \mathbb{R}^4 und $B' = ((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (1, 1, 1)^t)$ von \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 83: Betrachte die Basen $B_1 = ((1, 1)^t, (0, 1)^t)$, $B_2 = ((2, -1)^t, (2, 3)^t)$, $B_3 = ((4, 4)^t, (1, 2)^t)$ und $B_4 = ((-1, 1)^t, (0, 2)^t)$ des \mathbb{R}^2 , sowie die \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Matrix-Darstellung

$$M_{B_2}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermittle die Transformationsmatrizen $T_{B_4}^{B_2}$ und $T_{B_1}^{B_3}$ mit $T_{B_4}^{B_2} \circ M_{B_2}^{B_1}(f) \circ T_{B_1}^{B_3} = M_{B_4}^{B_3}(f)$.

(b) Ermittle Basen B_5 und B_6 von \mathbb{R}^2 mit

$$M_{B_6}^{B_5}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 84: Sei $B = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis des K -Vektorraumes V , $D = (y_1, y_2)$ eine Basis des K -Vektorraumes W und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$, so dass $M_D^B(f) = (a_{i,j})_{i=1,2; j=1,2,3}$ die Matrix-Darstellung von f bezüglich (B, D) ist. Ferner setzen wir:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 + x_3 & y'_1 &= y_2 \\ x'_2 &= x_2 + x_3 & y'_2 &= y_1 - y_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

und $B' = (x_1, x_2, x_3)$ sowie $D' = (y'_1, y'_2)$.

(a) Zeige, B' ist eine Basis von V und D' ist eine Basis von W .

(b) Bestimme, die Matrix $M_{D'}^{B'}(f)$, d. h. die Matrix-Darstellung von f bezüglich der Basen (B', D') .

Aufgabe 85: Bestimme, sofern sie existiert, die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 86: Zeige, dass die folgende Matrix $A \in \text{Mat}(4, \mathbb{R})$ invertierbar ist und berechne die Inverse,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 87: Prüfe, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme lösbar sind, und bestimme ggf. sämtliche Lösungen:

$$\begin{array}{rcl} -x + 6y + 2z & = & 4 \\ 2x - 2y - z & = & 2 \\ 3x - 4y - 2z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x + y + z - u & = & 4 \\ x - y + z + u & = & 8 \\ 3x + y + 3z - u & = & 6 \end{array}$$

Aufgabe 88: Prüfe, ob die folgende Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, und gib ggf. die inverse Abbildung an:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{pmatrix}.$$