Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2010/11, Blatt 1
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Die Aufgaben des ersten Übungsblattes sind als Präsenzaufgaben für die Übungsstunden der ersten Woche gedacht.

Aufgabe 1:

(a) Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}$–Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$:

(1) $U_1 = \{(x, x+1, x+2, x+4)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(2) $U_2 = \{(x, 2x, 3x, 4x)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(3) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_3 = x_1 + x_2,\ x_4 = x_2 + x_3\}$,

(4) $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_2 \geq 0\}$,

(5) $U_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$.

Welche dieser Mengen sind Unterräume von V? Begründe Deine Aussage.

(b) Sei V ein K-Vektorraum und $F = (v_1, \ldots, v_5)$ eine linear unabhängige Familie in V. Welchen der Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ kann man durch $v := v_2 - v_3 + v_4 - v_5$ ersetzen, so dass die daraus resultierende Familie wieder linear unabhängig ist? Begründe Deine Aussage.

Aufgabe 2: Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & ty & + & z & = & 1+t \end{array}$$

Aufgabe 3: Seien $B = \big((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,-1)^t\big)$ und $B' = \big((2,1)^t, (1,1)^t\big)$. E bzw. E' seien die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$. Ferner sei $f \in \mathrm{Hom}_K\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ gegeben durch $f\big((x,y,z)^t\big) = (x - y + z, 2x + y)^t$.

(a) Zeige, dass B und B' Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Bestimme $M^E_{E'}(f)$.

(c) Bestimme $M^B_{B'}(f)$ sowie die Transformationsmatrizen T^B_E und $T^{E'}_{B'}$ mit $T^{E'}_{B'} \cdot M^E_{E'}(f) \cdot T^B_E = M^B_{B'}(f)$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper.

(a) Begründe, weshalb die Mengen $U := \{(a_1, \ldots, a_n)^t \in K^n \mid a_1 = \ldots = a_n\}$ und $U' := \left\{(a_1, \ldots, a_n)^t \in K^n \;\middle|\; a_1 + \ldots + a_n = 0\right\}$ Unterräume des K^n sind.

(b) Bestimme $\dim_K(U)$, $\dim_K(U')$, $\dim_K(U \cap U')$ und $\dim_K(U + U')$.