Fachbereich Mathematik Wintersemester 2010/11, Blatt 2
Thomas Markwig Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 28/10/2010, 10:00

Aufgaben 6(c) und 8 sind Präsenzaufgaben und brauchen nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 5: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung und $U \leq V$ ein f-*invarianter Unterraum*, d.h. $f(U) \subseteq U$. Wir definieren

$$f_U : U \longrightarrow U : x \longmapsto f(x),$$

die Einschränkung von f auf U, und

$$f_{V/U} : V/U \longrightarrow V/U : \overline{x} \longmapsto \overline{f(x)}.$$

Beachte, dass f_U offenbar K-linear ist.

(a) Zeige, dass $f_{V/U}$ wohldefiniert und K-linear ist.

(b) Ist $B' = (x_1, \ldots, x_k)$ eine Basis von U und ergänzen wir B' zu einer Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ von V, so wissen wir bereits, dass $B'' = \left(\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n}\right)$ eine Basis von V/U ist (siehe Bemerkung 24.19). Zeige,

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{B'}^{B'}(f_U) & * \\ \hline 0 & M_{B''}^{B''}(f_{V/U}) \end{array}\right),$$

wobei $0 \in \mathrm{Mat}((n-k) \times k, K)$ die Nullmatrix ist und $* \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k), K)$ eine geeignete Matrix ist.

(c) Zeige, $\det(f) = \det(f_U) \cdot \det(f_{V/U})$.

Aufgabe 7: Sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Bestimme die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-1} & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-2} & \lambda^{n-1} & 1 & \ldots & \lambda^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K).$$

Aufgabe 8: Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ $\mathbb{C}$-linear. Mittels Einschränkung der Skalarmultiplikation können wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum und f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auffassen. Des Weiteren bezeichnen wir mit $\det_{\mathbb{C}}(f)$ die Determinante von f als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und $\det_{\mathbb{R}}(f)$ die Determinante von f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeige: $\det_{\mathbb{R}}(f) = |\det_{\mathbb{C}}(f)|^2$.

HINWEIS: Für eine $\mathbb{C}$-Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V betrachte man die zugehörige $\mathbb{R}$-Basis $(v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n)$ sowie jeweils die zugehörige Matrixdarstellung von f. Wem der allgemeine Fall zu schwer ist, der beschränke sich auf die Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto (a + ib) \cdot z$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Was ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum?