Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2010/11, Blatt 3
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 04/11/2010, 10:00

Aufgabe 12 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 9:

a. Berechne die Determinante folgender Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R}).$$

b. Berechne die folgende Determinante mit Hilfe des Determinantenentwicklungssatzes:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 10: Es seien $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit Basen $B_1, \ldots, B_k$. Ferner sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung und die U_i seien alle f-invariant, d.h. $f(U_i) \subseteq U_i$.

a. Zeige, genau dann ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ die direkte Summe der U_i, wenn $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ eine Basis von V ist.

b. Ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ und $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, so gilt

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c|cc} M_{B_1}^{B_1}(f_{U_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \boxed{M_{B_2}^{B_2}(f_{U_2})} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & M_{B_k}^{B_k}(f_{U_k}) \end{array}\right).$$

c. Zeige, $\det(f) = \det(f_{U_1}) \cdot \ldots \cdot \det(f_{U_k})$.

Aufgabe 11: Es seien $a_0, \ldots, a_n \in K$ und $n \geq 1$. Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12: Bestimme für welche $s \in \mathbb{R}$ die Abbildung $f_s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^t \mapsto (x + z, x + 2y + z, sx + y - z)^t$ invertierbar ist und berechne für diese die Inverse mit Hilfe der Adjunkten.