Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2010/11, Blatt 4
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 11/11/2010, 10:00

Aufgabe 16 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 13:

a. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ungeradem n und $A^t = -A$. Zeige, A ist nicht invertierbar. Bleibt die Aussage wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper ersetzen?

b. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, so ist auch A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix.

c. Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$x + 2z = 3, \quad 3x + y = 5 \quad \text{und} \quad -x + y = 1.$$

Aufgabe 14: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $1 \leq \dim_K(V) < \infty$.

a. Zeige, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $f^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(f) = 0$.

b. Zeige, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

c. Finde ein Beispiel für eine Matrix wie in Teil b., bei der nicht alle Diagonalelemente Null sind.

Hinweis zum Beweis von a.: Führe Induktion über $n = \dim_K(V)$. Dazu zeige man, daß $M_B^B(f)$ für eine geeignete Wahl von B Blockgestalt mit einem Nullblock in der oberen linken Ecke hat. Aufgabe 6b. mit $U = \mathrm{Ker}(f)$ ist dabei hilfreich.

Aufgabe 15: Es sei $1 \leq \dim_K(V) < \infty$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_U} \cdot \chi_{f_{V/U}}.$$

b. Ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, wobei die U_i f-invariant seien, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_{U_1}} \cdot \ldots \cdot \chi_{f_{U_k}}.$$

Aufgabe 16:

a. Zerlege das Polynom $f = t^4 + t^3 + 2t - 4 \in \mathbb{C}[t]$ in Linearfaktoren.

b. Es sei L eine K-Algebra und $b \in L$ mit $\mu_b \neq 0$. Zeige, μ_b ist *das* normierte Polynom $f \neq 0$ kleinsten Grades mit $f(b) = 0$.

c. Bestimme das Minimalpolynom $\mu_b \in \mathbb{Q}[t]$ von $b = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

d. Zeige, ist $f \in \mathbb{R}[t]$ irreduzibel, so ist $\deg(f) \in \{1, 2\}$.

Hinweis zu Teil d., betrachte für eine komplexe Nullstelle λ von f die Fälle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In letzterem Fall zeige, daß auch das konjugiert Komplexe von λ eine Nullstelle von f ist und betrachte dann das Polynom $g = (t - \lambda) \cdot (t - \overline{\lambda})$.