Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2010/11, Blatt 5
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 18/11/2010, 10:00

Aufgabe 20 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 17:

a. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der folgenden Matrix A und entscheide, ob sie diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

b. Es sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ und $T = E_{11}+E_{12}+E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(K)$. Zeige, daß der Endomorphismus $f : V \to V : A \mapsto T\circ A\circ T^{-1}$ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis B von V, so daß $M_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 18: [Zyklische Unterräume]
Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $0 \neq x \in V$ und $m > 0$ mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$.

a. Zeige, $B = \big(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\big)$ ist eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(B)$.

b. Zeige, U ist f-invariant.

c. Bestimme $M_B^B(f_U)$ und zeige $\chi_{f_U} = \mu_{f_U} = t^m$.

Wir nennen U einen *zyklischen Unterraum* von V.

Aufgabe 19: Es sei $1 \leq \dim_K(V) < \infty$.

a. Sind $x_1, \ldots, x_r \in V$ Eigenvektoren von $f \in \mathrm{End}_K(V)$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \ldots, \lambda_r \in K$, dann ist die Familie $(x_1, \ldots, x_r)$ linear unabhängig.

b. Sind $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt $\sigma(f \circ g) = \sigma(g \circ f)$.

c. Sind $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$ und $\lambda \in K$, so ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ g-invariant.

Aufgabe 20:

a. Zeige, ist $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$, so gibt es ein Polynom $p \in K[t]$ mit $A^{-1} = p(A)$.

b. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$