Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2010/11, Blatt 6
Thomas Markwig | Yue Ren, Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 25/11/2010, 10:00

Aufgabe 24 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 21:

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix $T^{-1} \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{Q})$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

b. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(5, K)$ mit $\chi_A = t(t-1)^4$, $\mu_A = t(t-1)^2$ und $\mathrm{rang}(A - \mathbb{1}_5) = 2$. Bestimme die Jordansche Normalform von A.

c. Bestimme mit Hilfe von SINGULAR eine Basis B von $\mathbb{Q}^5$, bezüglich derer die Matrixdarstellung der Abbildung $f : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ Jordansche Normalform hat, wo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_3, -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5, x_1 - x_3 + 2x_5)^t.$$

Aufgabe 22:

a. Mit den Bezeichnungen aus dem Satz zur Jordanschen Normalform zeige man, daß für $i = 1, \ldots, r$ und $1 \leq j \leq m_i$ gilt:

$$t_{ij} = \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j-1}\right) - 2 \cdot \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j}\right) + \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{j+1}\right)$$

und

$$t_{ij} = \mathrm{rang}\left((A - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{j-1}\right) - 2 \cdot \mathrm{rang}\left((A - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{j}\right) + \mathrm{rang}\left((A - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{j+1}\right).$$

Hinweise: 1. Zeige, $\mathrm{rang}\left(J_j(0)^l\right) = \max\{0, j - l\}$ für $l \in \mathbb{N}$. 2. Betrachte zunächst den Fall $r = 1$ und $\lambda_1 = 0$. 3. Den allgemeinen Fall führe man auf die Abbildungen $g_i := (f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)_{\mathrm{Hau}(f, \lambda_i)}$ zurück.

b. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ so, daß χ_A über K in Linearfaktoren zerfällt, so sind A und A^t konjugiert.

c. Gilt die Aussage in b. auch noch ohne die Voraussetzung, daß χ_A zerfällt?

Aufgabe 23: Zeige, ist $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$, so sind für $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ die folgenden beiden Aussagen gleichwertig:

a. $\mathcal{A}$ ist simultan diagonalisierbar, d. h. es gibt eine Basis B von V, so daß für alle $f \in \mathcal{A}$ gilt $M_B^B(f)$ ist eine Diagonalmatrix.

b. Für alle $f \in \mathcal{A}$ gilt, f ist diagonalisierbar, und für alle $f, g \in \mathcal{A}$ gilt, $f \circ g = g \circ f$.

Hinweis: Führe für "b. $\Rightarrow$ a." Induktion über n und zerlege dazu V in zwei invariante Unterräume kleinerer Dimension.

Aufgabe 24: Beweise oder widerlege die folgende Aussage für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$:

$$A \text{ ist konjugiert zu } B \iff \chi_A = \chi_B,\ \mu_A = \mu_B \text{ und } \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B).$$