Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2010/11, Blatt 7

Yue Ren, Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 02/12/2010, 10:00

Aufgabe 28 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 25:

a. Es sei $b : K^2 \times K^2 \to K : \big((x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t\big) \mapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_2$. Ferner bezeichne $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des K^2 und $B = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = (1, 1)^t$ und $x_2 = (1, -1)^t$ sei eine weitere Basis.
Zeige, daß b eine symmetrische Bilinearform ist und berechne die die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$ sowie die Transformationsmatrix T_E^B mit
$$M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \cdot M_E(b) \cdot T_E^B.$$

b. Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang von A:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Zeige, daß durch
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$$
ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ definiert wird.

Aufgabe 26: Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (x_i \mid i \in I)$ und sei $F = \big(y_{ij} \mid (i,j) \in I \times I\big)$ eine Familie von Vektoren im K-Vektorraum W. Zeige, es gibt genau eine bilineare Abbildung $f : V \times V \to W$ mit $f(x_i, x_j) = y_{ij}$ für alle $(i,j) \in I \times I$.

Aufgabe 27: Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$.

a. Zeige, es gibt eine symmetrische Bilinearform $b' \in \mathrm{Bil}_K(V)$ und eine schiefsymmetrische Bilinearform $b'' \in \mathrm{Bil}_K(V)$, so daß $b = b' + b''$.

b. Zeige, die Bilinearformen b' und b'' in a. sind eindeutig bestimmt.

c. Gelten die Aussagen in a. und b. auch noch, wenn $\mathrm{char}(K) = 2$?

Anmerkung, b heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $b(x, y) = -b(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 28: Zeige, durch $\big\langle (x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \big\rangle := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$ für $(x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert und bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieses Skalarproduktes.