

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 09/12/2010, 10:00

Aufgabe 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29:

- Betrachte den Vektorraum $U = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ und bestimme eine ONB bezüglich des Skalarproduktes aus Aufgabe 25c.
- Für $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ definieren wir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \text{Spur}(A^t \circ B)$.
 - Zeige, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V .
 - Zeige, für $U = \{A \in V \mid A^t = A\}$ gilt $U^\perp = \{A \in V \mid A^t = -A\}$.

Aufgabe 30: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum, $U \leq V$ und π_U die orthogonale Projektion auf U .

- Zeige, $(U^\perp)^\perp = U$.
- Zeige, ist (x_1, \dots, x_r) eine ONB von U , dann gilt $\pi_U(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, x_i \rangle \cdot x_i$.

Aufgabe 31: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum.

- Ist $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal, so gelten $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^*)$ und $V = \text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$.
- Für jedes $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ gibt es genau ein $y \in V$ mit $g(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in V$.
- Ist $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal, so gibt es ein $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $f^* = p(f)$.

Aufgabe 32:

- Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die durch das Skalarprodukt definierte Norm. Zeige, für $x, y \in V$ gelten:
 - Die Parallelogrammgleichung: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
 - Der Satz des Pythagoras': $x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.
- Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ positiv definit ist:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$