Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2010/11, Blatt 9

Yue Ren, Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 16/12/2010, 10:00

Aufgabe 36 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 33: Bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, die die folgende symmetrische Matrix A diagonalisiert:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A positiv definit?

Aufgabe 34: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ bijektiv. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a. Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt $f(x) \perp f(y)$.

b. Für $x, y \in V$ mit $||x|| = ||y||$ gilt $||f(x)|| = ||f(y)||$.

c. Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $g \in O(V)$ bzw. $g \in U(V)$ mit $f = \lambda g$.

Hinweise: Für den Schritt von a. nach b. kann man die Aussage zunächst für Vektoren in einer ONB zeigen, und für den Schritt von b. nach c. kann man sich unter anderem überlegen, weshalb $||g(x)|| = ||x||$ schon impliziert, daß g orthogonal bzw. unitär ist (das hat etwas mit der quadratischen Form zum Skalarprodukt zu tun.

Aufgabe 35: Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

a. Zeige, falls $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in V$, so ist $f = 0$ die Nullabbildung.

b. Zeige, die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

   (a) $f^* = -f$.
   (b) Für alle $x \in V$ gilt: $\langle f(x), x\rangle \in i\mathbb{R}$.
   (c) Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f und der Realteil aller Eigenwerte ist Null.

Aufgabe 36:

a. Sei V ein normierter Raum und $U \subseteq V$.

   (a) U ist genau dann offen in V, wenn $U = \mathring{U}$.
   (b) U ist genau dann abgeschlossen in V, wenn $U = \overline{U}$.
   (c) $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$ und $\mathring{\mathring{U}} = \mathring{U}$.
   (d) $\overline{U} = \mathring{U} \,\dot\cup\, \partial U$.
   (e) ∂U ist abgeschlossen in V.

b. Zeige, $||f||_\infty := \max\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\}$ definiert eine Norm auf $V = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$.