Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2010/2011, Blatt 10

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 06/01/2011, 10:00

Aufgabe 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Die restlichen Aufgaben sind vollständig von allen zu bearbeiten. Auf Grund der Fülle wird jedoch nur ein Teil von den Übungsleitern korrigiert werden können, wobei wir uns trotzdem bemühen, so viel Rückmeldung wie möglich zu erteilen.

Aufgabe 37:

(a) Bestimme für die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ geeignete Konstanten r und s gemäß Lemma 40.40.

(b) Sei $X := [0,\infty) \times [0,\infty)$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ die Potenzfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } y = 0 \\ 1 & \text{für } x = y = 0 \\ y^x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuche, an welchen Stellen f stetig ist.

(c) Zeige, dass die Menge $U = \left\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x < 2y^2 - 1\right\}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

(d) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y)^t \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeige, dass f im Nullpunkt das Folgenkriterium für Stetigkeit für jede Folge erfüllt, die sich auf einer Geraden dem Nullpunkt nähert. Ist f in $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 38:

(a) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $U \subseteq M$. Betrachte U als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von M. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) $X \subseteq U$ ist offen in U. $\iff$ $\exists\, O$ offen in M mit $X = U \cap O$.

(2) $X \subseteq U$ ist abgeschlossen in U. $\iff$ $\exists\, A$ abgeschlossen in M mit $X = U \cap A$.

Man nennt die Menge X dann auch *relativ* offen oder abgeschlossen in M.

(b) Sei $V = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ der Vektorraum der stetigen und $U = \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ der Vektorraum der stetig-differenzierbaren Abbildungen auf dem Intervall $[0,1]$. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) V ist *nicht* vollständig bzgl. der euklidischen L_2-Norm aus Beispiel 40.5.

(2) V ist ein Banachraum bzgl. der Maximumsnorm aus Beispiel 40.5.

(3) Der Differentialoperator $D : U \longrightarrow V : f \longmapsto f'$ ist ein linearer Operator, der *nicht* stetig ist, wobei U und V normiert sind bzgl. der Maximumsnorm.

Aufgabe 39: Seien V bzw. W normierte Räume mit Normen $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$. Zeige die folgenden Aussagen

(a) Für eine bijektive lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

   (1) f und f^{-1} sind stetig.

   (2) $\exists\, r, s > 0 \;:\; \forall\, x \in V \;:\; s \cdot \|x\|_V \leq \|f(x)\|_W \leq r \cdot \|x\|_V$.

   Man nennt den Isomorphismus f dann einen *topologischen Isomorphismus*.

(b) Ist $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ und betrachten wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm, so ist jeder Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ ein topologischer Isomorphismus.

(c) Jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ein Banachraum.

(d) Auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

(e) Sind V und W endlich-dimensional, so gilt $L(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

Aufgabe 40: Sei M ein metrischer Raum und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Finde geeignete Beispiele für M, f und Teilmengen $A, O \subseteq M$ bzw. $K \subseteq \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $A \subseteq M$ ist abgeschlossen und $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ ist *nicht* abgeschlossen.

(b) $O \subseteq M$ ist offen und $f(O) \subseteq \mathbb{R}$ ist *nicht* offen.

(c) $K \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt und $f^{-1}(K) \subseteq M$ ist *nicht* kompakt.