Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2010/2011, Blatt 11
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 13/01/2011, 10:00

Aufgabe 44 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 41:

(a) Begründe, weshalb $f : \mathbb{R}^3_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^t \mapsto (z\sqrt{y} + \sqrt{z}, xyz + \ln(x + y))^t$ total differenzierbar ist, und berechne die Ableitung von f.

(b) Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^t \circ A \circ x$ total differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und berechne die Ableitung.

(c) Zeige, die folgende Funktion ist total, aber nicht stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \|x\|_2^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\|x\|_2}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Zeige, dass für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2)^t \neq (0, 0)^t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die beiden partiellen Ableitungen $D_1D_2f(0, 0)$ und $D_2D_1f(0, 0)$ existieren, aber nicht überein stimmen.

Aufgabe 42: Zeige, ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine in $(0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, so ist f $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe 43: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \times [c, d] \subset U$.

(a) Zeige, die Funktion $H : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \mapsto \int_a^x f(s, y)\ ds$ ist stetig.

(b) Zeige, falls $\frac{\partial f}{\partial y} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert und stetig ist, so ist die Abbildung

$$F : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto \int_a^b f(s, y)\ ds$$

stetig differenzierbar auf $[c, d]$ mit $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(s, y)\ ds$.

(c) Zeige, $\int_a^b \int_c^d f(s, t)\ dt\ ds = \int_c^d \int_a^b f(s, t)\ ds\ dt$.

(d) Leite aus (c) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 19.4) den Satz von Schwartz her: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Aufgabe 44: Sei $\Delta = D_1^2 + \ldots + D_n^2$ der *Laplace-Operator* und $f \in \mathcal{C}^2((0, 1), \mathbb{R})$. Zeige, dass für die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)^t\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(\|x\|_2)$ die Gleichung

$$\Delta\varphi(x) = f''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} \cdot f'(\|x\|_2) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)^t\}$$

gilt und berechne $\Delta\varphi$ für den Fall $f(t) = \frac{1}{t^{n-2}}$ mit $n > 2$.