Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2010/11, Blatt 12
Thomas Markwig — Yue Ren, Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 20/01/2011, 10:00

Aufgabe 48 ist als Präsenzaufgabe nur von den Fernstudenten einzureichen.

Aufgabe 45:

(a) Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

(b) Bestimme das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,a}$ im Entwicklungspunkt $a = (0, \pi)^t$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto \sin(y) - x(x + \sin(y) + 1).$$

(c) Finde zu $a > 0$ ein Intervall $[c, d]$, so daß die Funktion $f : [c, d] \longrightarrow [c, d] : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$ eine strikte Kontraktion ist und bestimme den Fixpunkt von f.

Aufgabe 46:

(a) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ und $f : U_\epsilon(a) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$. Zeige, dass f konstant ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine q-Kontraktion. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass dann die folgende Funktion surjektiv ist:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^t \longmapsto (x_1 + f(x_2), x_2 + f(x_1))^t.$$

Aufgabe 47:

(a) Zeige, dass $||A \cdot x||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||x||_2$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Zeige, ist $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion und definieren wir das Integral

$$\int_0^1 g(t)\ dt = \left(\int_0^1 g_1(t)\ dt, \ldots, \int_0^1 g_m(t)\ dt\right)^t \in \mathbb{R}^m$$

als den Vektor der Integrale über die Koordinatenfunktionen, so gilt

$$\left|\left|\int_0^1 g(t)\ dt\right|\right|_2 \leq \int_0^1 ||g(t)||_2\ dt.$$

(c) Zeige, ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{U_r(a)} \subseteq U$ und $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar auf U, dann gilt für $x, y \in \overline{U_r(a)}$ stets

$$||h(x) - h(y)||_2 \leq ||x - y||_2 \cdot \sup_{z \in \overline{U_r(a)}} ||Dh(z)||_2.$$

Aufgabe 48:

(a) Bestimme das sechste Taylor-Polynom $T^6_{f,a}$ für $a = (0, 0)^t$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z)^t \longmapsto (x + y^3) \cdot \cos\left(\frac{z}{1 + y^2}\right).$$

(b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto (y - x^2) \cdot (y - 2x^2)$ keine Extremstelle hat, dass aber für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)^t$ die Funktion $f_{|G}$ ein isoliertes lokales Minimum in $(0, 0)^t$ besitzt.