Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2010/11, Blatt 13

Thomas Markwig — Yue Ren, Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 27/01/2011, 10:00

Aufgabe 52 ist als Präsenzaufgabe nur von den Fernstudenten einzureichen.

Aufgabe 49:

a. Zeige, daß die Verschwindungsmenge $V(f)$ für

$$f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2:(x_1,x_2,y_1,y_2)^t\mapsto\big(x_1^2+x_2^2-2y_1y_2,x_1^3+x_2^3+y_1^3-y_2^3\big)^t$$

lokal in $(-1,1,1,1)$ als Graph einer Abbildung $\varphi:U_\varepsilon(-1,1)\longrightarrow U_r(1,1)$ darstellbar ist und berechne $D\varphi(-1,1)$.

b. Berechne die lokalen Extrema der Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto x_1^2+x_2^2+x_2$ unter der Nebenbedingung $(x_1-1)^2+x_2^2=5$.

c. Es seien $p,q\in\mathbb{R}_{>1}$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Bestimme die Extremstellen der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2_{>0}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x_1^p}{p}+\frac{x_2^q}{q}$$

unter der Nebenbedingung $x_1x_2=1$. Folgere daraus für $u,v>0$ die Höldersche Ungleichung $\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}\geq uv$.

Aufgabe 50: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ sei stetig auf $\overline{U}$ und stetig differenzierbar auf U. Ferner sei $y\in\mathbb{R}^n$ so, daß $f^{-1}(y)\subseteq U$ und $\det\big(Df(x)\big)\neq 0$ für alle $x\in f^{-1}(y)$. Zeige, daß $f^{-1}(y)$ nur endlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 51: [Spektralsatz für symmetrische Matrizen]

Sei $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto x^t\circ A\circ x=\langle Ax,x\rangle$. Für $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ setzen wir

$$M(Y)=\big\{x\in\mathbb{R}^n\ \big|\ ||x||_2=1,\langle x,y\rangle=0\ \forall\, y\in Y\big\}.$$

a. Zeige, für $i=1,\ldots,n$ gibt es $y_i\in M(y_1,\ldots,y_{i-1})$ mit $\lambda_i:=f(y_i)\overset{!}{=}\max_{x\in M(y_1,\ldots,y_{i-1})}f(x)$.

b. Zeige, es gilt $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$.

c. Zeige $Ay_i=\lambda_iy_i$ für $i=1,\ldots,n$ mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren.

d. Bestimme alle lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $||x||_2=1$.

Aufgabe 52:

a. Bestimme für die Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2:x\mapsto(x_1,x_2^2-2x_1x_2)^t$$

alle Punkte $y\in\mathbb{R}^2$, so daß $\det(Df(x))\neq 0$ für alle $x\in f^{-1}(y)$.

b. Welcher Punkt in $V(x_1^2+x_2^2-x_3)$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $\big(1,1,\frac{1}{2}\big)^t$?