

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 03/02/2011, 10:00

In der kommenden Woche folgen zwei weitere Aufgaben, die als Präsenzaufgaben nur in den Übungen besprochen werden und von niemandem einzureichen sind.

Aufgabe 53:

a. Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x+y) \, d(x,y) \quad \text{und} \quad \int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} \frac{x^3 y^2}{1+z^2} \, d(x,y,z).$$

b. Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\text{ggT}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von x in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktionen

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N(x)}, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0, 1] \times [0, 1]$ und bestimme ggf. den Wert des Integrals über diesem Quader.

Aufgabe 54:

a. Zeige, sind $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $f \cdot g$ auf $[a, b] \times [a, b]$ integrierbar und

$$\int_{[a,b] \times [a,b]} f(x) \cdot g(y) \, d(x,y) = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(y) \, dy.$$

b. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei integrierbar auf $[a, b]$ und stetig in $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$. Zeige, $\int_{[a,b]} f(x) \, dx > 0$.

c. Es sei $[a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sei stetig. Zeige,

$$\int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx \geq (b-a)^2.$$

Hinweis zu c.: Setze die linke Seite der Ungleichung zu $\frac{1}{2} \cdot \int_{[a,b] \times [a,b]} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \, d(x,y)$ in Beziehung.