Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2011/12, Blatt 1
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Die Aufgaben des ersten Übungsblattes sind als Präsenzaufgaben für die Übungsstunden der ersten Woche gedacht.

Aufgabe 1: [Zyklische Unterräume]

Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $0 \neq x \in V$ und $m > 0$ mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$.

a. Zeige, $B = \big(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\big)$ ist eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(B)$.

b. Zeige, U ist f-invariant.

c. Bestimme $M_B^B(f_U)$.

Wir nennen U einen *zyklischen Unterraum* von V.

Aufgabe 2: Berechne die Determinante folgender Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3: Seien $B = \big((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,-1)^t\big)$ und $B' = \big((2,1)^t, (1,1)^t\big)$. E bzw. E' seien die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$. Ferner sei $f \in \mathrm{Hom}_K\big(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\big)$ gegeben durch $f\big((x,y,z)^t\big) = (x-y+z, 2x+y)^t$.

(a) Zeige, dass B und B' Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) Bestimme $M_{E'}^E(f)$.

(c) Bestimme $M_{B'}^B(f)$ sowie die Transformationsmatrizen T_E^B und $T_{B'}^{E'}$ mit

$$T_{B'}^{E'} \cdot M_{E'}^E(f) \cdot T_E^B = M_{B'}^B(f).$$

Aufgabe 4: Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}$–Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$:

(1) $U_1 = \{(x, x+1, x+2, x+4)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(2) $U_2 = \{(x, 2x, 3x, 4x)^t \mid x \in \mathbb{Q}\}$,

(3) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_3 = x_1 + x_2,\ x_4 = x_2 + x_3\}$,

(4) $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q},\ x_2 \geq 0\}$,

(5) $U_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}$.

Welche dieser Mengen sind Unterräume von V? Begründe Deine Aussage.