Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2011/12, Blatt 3
Thomas Markwig | Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 27.10.2011, 10:00

Aufgabe 9: Es sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiere

$$A_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Leite eine Rekursionsformel für $d_{n,\lambda} = \det\left(A_{n,\lambda}\right)$ her und zeige, $d_{2+3k,1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10:

a. Bestimme die Werte $s \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & sy & + & z & = & 1 \\ 3x & & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

eindeutig lösbar ist und berechne die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

b. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar, so ist auch die Adjunkte $A^\#$ invertierbar mit

$$\left(A^\#\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\# = \frac{1}{\det(A)} \cdot A.$$

Aufgabe 11:

a. Es seien $b_0, \ldots, b_n \in K$ paarweise verschieden und $c_0, \ldots, c_n \in K$ beliebig. Zeige, es gibt genau ein Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $\deg(f) \leq n$ mit $f(b_i) = c_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

b. Bestimme das Minimalpolynom von $b = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

Aufgabe 12: Es sei $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Ferner sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ gegeben und wir betrachten den Endomorphismus

$$T_A : V \longrightarrow V : X \mapsto A \circ X.$$

a. Zeige, genau dann ist $\det(A) \neq 0$, wenn $\det(T_A) \neq 0$.

b. Zeige, $\mathrm{Spur}(T_A) = 2 \cdot \mathrm{Spur}(A)$.