Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2011/12, Blatt 4
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 3.11.2011, 10:00

Aufgabe 13:

a. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und überprüfe A auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

b. Es sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $T = E_{12}+E_{21}+E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{11})$. Prüfe den Endomorphismus $f : V \to V : A \mapsto T \circ A + A \circ T^{-1}$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

Hinweis, für die Diagonalisierbarkeit braucht man Ergebnisse der Vorlesung vom 31. Oktober.

Aufgabe 14: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix vom Rang $\mathrm{rang}(A) = 1$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a. t^2 ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_A von A.

b. A ist diagonalisierbar.

c. $\mathrm{Spur}(A)$ ist ein Eigenwert von A.

Aufgabe 15: Es sei $1 \leq \dim_K(V) < \infty$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_U} \cdot \chi_{f_{V/U}}.$$

b. Ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, wobei die U_i f-invariant seien, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_{U_1}} \cdot \ldots \cdot \chi_{f_{U_k}}.$$

c. Sei $0 \neq x \in V$ und $m > 0$ mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$, und sei $U = \mathrm{Lin}(B)$ mit $B = \left(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\right)$ der zugehörige zyklische Unterraum (siehe Blatt 1, Aufgabe 1). Zeige $\chi_{f_U} = \mu_{f_U} = t^m$.

Aufgabe 16:

a. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $\lambda \in K$. Zeige, λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ ein Eigenwert von A^t ist.

b. Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, so daß jeder Vektor $0 \neq x \in V$ ein Eigenvektor von f ist, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$.