Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 10.11.2011, 10:00

Aufgabe 17: Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $x \in V$.

a. Zeige, daß die Menge $I_{f,x} := \{p \in K[t] \mid p(f)(x) = 0\} \neq \emptyset$ ein Ideal in $K[t]$ ist, d.h. für $p, q \in I_{f,x}$ und $r \in K[t]$ gilt $p + q, r \cdot p \in I_{f,x}$.

b. Zeige, daß $U_{f,x} := \{p(f)(x) \mid p \in K[t]\}$ ein Unterraum von V ist.

c. Zeige, ist $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^m(x) = 0$, so gilt

$$I_{f,x} = \{t^m \cdot p \mid p \in K[t]\}$$

und

$$U_{f,x} = \mathrm{Lin}\left(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\right).$$

Anmerkung: in Teil c. darf man ohne Beweis verwenden, daß jedes Ideal I in $K[t]$ von einem geeigneten Element q erzeugt werden kann, also von der Form $I = \{q \cdot p \mid p \in K[t]\}$ ist.

Aufgabe 18:

a. Zeige, daß die Matrix A diagonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_5)$, die sie diagonalisiert, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_5).$$

b. Welche Jordansche Normalform kommt für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ in Frage, wenn $A^4 + 12A^2 = 6A^3 + 8A$ und $\mathrm{rang}(A) = 2 \cdot \mathrm{rang}(A - 2 \cdot \mathbb{1}_4) = 4$?

c. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum P_n der Polynome vom Grad höchstens n sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : P_n \longrightarrow P_n : p \mapsto p(t+1)$ und bestimme deren Jordansche Normalform.

d. Zeige, ist $0 \neq f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus, so besitzt $\mathrm{Eig}(f, 0)$ kein f-invariantes direktes Komplement.

Aufgabe 19: Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ und $\dim_K(V) = n \geq 1$.

a. Bestimme den Rang und die Eigenwerte von f.

b. Bestimme das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von f.

c. Bestimme die Jordansche Normalform von f.

Aufgabe 20: Mit den Bezeichnungen aus dem Satz zur Jordanschen Normalform zeige man, daß für $i = 1, \ldots, r$ und $1 \leq j \leq m_i$ gilt:

$$t_{ij} = \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{j-1}\right) - 2 \cdot \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{j}\right) + \mathrm{rang}\left((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{j+1}\right).$$

Hinweise: 1. Zeige, $\mathrm{rang}\left(J_j(0)^l\right) = \max\{0, j-l\}$ für $l \in \mathbb{N}$. 2. Betrachte zunächst den Fall $r = 1$ und $\lambda_1 = 0$. 3. Den allgemeinen Fall führe man auf die Abbildungen $g_i := (f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)_{\mathrm{Hau}(f,\lambda_i)}$ zurück.