Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2011/12, Blatt 6
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 17.11.2011, 10:00

Aufgabe 21:

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix $T \in Gl_5(\mathbb{F}_5)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_5).$$

b. Bestimme mit Hilfe von SINGULAR eine Basis B von $\mathbb{Q}^4$, bezüglich derer die Matrixdarstellung der Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ Jordansche Normalform hat, wo:

$$f(w, x, y, z) = (w + x + y + z, 2w + 4x + 5y + 5z, -4w - 6x - 7y - 6z, 2w + 3x + 3y + 2z)^t.$$

Aufgabe 22:

a. Zeige, für $k, m \geq 1$ und $0 \neq \lambda \in K$ ist $J_m(\lambda)^k$ eine obere Dreiecksmatrix, die auf der i-ten oberen Nebendiagonalen den Wert $\lambda^{k-i} \cdot \binom{k}{i}$ hat für $i = 0, \ldots, m-1$.

Hinweis: man betrachte die Zerlegung $J_m(\lambda) = D + N$ mit $D = \lambda \cdot \mathbb{1}_m$ und beachte, daß $D \circ N = N \circ D$ gilt.

b. Berechne A^{100} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$

c. Betrachte die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n$ und Anfangswerten $a_0 = -1$ und $a_1 = 1$. Finde eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $Ax = y$ für $x = (a_n, a_{n+1})^t$ und $y = (a_{n+1}, a_{n+2})^t$. Bestimme dann mit Hilfe der Jordanschen Normalform von A eine explizite Darstellung der Folge.

Aufgabe 23: Zeige mit Hilfe der Jordanschen Normalform, daß für ein normiertes Polynom $p \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

a. Je zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\mu_A = \mu_B = p$ sind konjugiert.

b. $\deg(p) = 1$, $\deg(p) = n$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p = (t - \lambda)^{n-1}$.

Aufgabe 24: Es sei $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \big((x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t\big) \mapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_2$. Ferner bezeichne $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $B = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = (1, 1)^t$ und $x_2 = (1, -1)^t$ sei eine weitere Basis.
Zeige, daß b eine symmetrische Bilinearform ist und berechne die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$ sowie die Transformationsmatrix T_E^B mit

$$M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \cdot M_E(b) \cdot T_E^B.$$