Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig
Wintersemester 2011/12, Blatt 7
Stefan Steidel

# Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 24.11.2011, 10:00

**Aufgabe 25:**

a. Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_5(\mathbb{R})$ eine Transformationsmatrix $T \in \text{Gl}_5(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang von $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

b. Zeige, sind $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen mit $x^tAx \leq x^tBx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist der Trägheitsindex von $A$ kleiner oder gleich dem Trägheitsindex von $B$.

**Aufgabe 26:**

a. Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $U = \{(v, w, x, y, z)^t \in \mathbb{R}^5 \mid v + w + x + y + z = 0\}$ bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$.

b. Zeige, für $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau dann zwei normierte Vektoren $x = (u, v, a)^t \in \mathbb{R}^3$ und $y = (r, s, b)^t \in \mathbb{R}^3$ die bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonal zueinander sind, wenn $a^2 + b^2 \leq 1$.

**Aufgabe 27: [Der $p$-adische Betrag]**

Sei $p$ eine Primzahl. Für $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\nu_p(a)$ die höchste Potenz von $p$, die $a$ teilt, und für $0 \neq q = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ setzen wir $\nu_p(q) = \nu_p(b) - \nu_p(c)$. Zeige, die Abbildung

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : q \mapsto \begin{cases} p^{-\nu_p(q)}, & \text{wenn } q \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } q = 0. \end{cases}$$

ist positiv definit, multiplikativ und genügt der Dreiecksungleichung.

**Aufgabe 28:**

a. Zeige, daß $\mathcal{B}(M, \mathbb{R}) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ für jede Menge $M$ ein Unterraum von $M^{\mathbb{R}}$ ist.

b. Zeige, daß auf $V = \mathcal{B}\big((-1,1), \mathbb{R}\big) \cap \mathcal{C}\big((-1,1), \mathbb{R}\big)$ durch

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

c. Berechne eine Orthonormalbasis des Unterraumes $U = \big\{f : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$ von $V$ bezüglich des Skalarproduktes aus Teil b..

Hinweis, in Teil b. substitutiere man $x = \cos(t)$, um die Konvergenz des uneigentlichen Integrals zu zeigen.