Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2011/12, Blatt 8

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 01.12.2011, 10:00

Aufgabe 29:

a. Bestimme zu der symmetrischen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix T, so daß $T^t \circ A \circ T$ Diagonalgestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Ist die Matrix A positiv definit?

b. Berechne für die Matrix $T \in O(n) \subseteq U(n)$ aus Teil a. eine unitäre Matrix S, so daß $S^* \circ T \circ S$ Diagonalgestalt hat.

c. Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix positiv definit ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 30: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum, $U \leq V$ und π_U die orthogonale Projektion auf U.

a. Zeige, $(U^\perp)^\perp = U$.

b. Zeige, ist $(x_1, \ldots, x_r)$ eine ONB von U, dann gilt $\pi_U(x) = \sum_{i=1}^r \langle x_i, x\rangle \cdot x_i$.

Aufgabe 31: Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ so, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^m = \mathrm{id}_V$. Zeige, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a. f ist unitär.

b. f ist normal.

c. Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ von f gilt $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \perp \mathrm{Eig}(f, \mu)$.

Aufgabe 32: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Beweise die folgenden Aussagen:

a. Ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal, so gelten $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*)$ und $V = \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

b. Ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, so gilt $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

c. Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ gibt es genau ein $y \in V$ mit $g(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in V$.