Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2011/12, Blatt 9
Thomas Markwig | Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 08.12.2011, 10:00

Aufgabe 33:

a. Identifizieren wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ der $m \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{m \times n}$, so definiert

$$\|(a_{ij})\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

gerade die euklidische Norm auf $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$.
Zeige, für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2.$$

b. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $a \in M$ und

$$d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto d'(x, y) = \begin{cases} d(x, a) + d(a, y), & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Zeige, d' ist eine Metrik auf M.

c. Überprüfe, welche der folgenden Mengen A offen, abgeschlossen und / oder kompakt in M ist? Was ist der Rand von A?

$$\text{(1) } A = \{(x, y)^t \mid x^2 < y\}, M = \mathbb{R}^2 \quad \text{(2) } A = \left\{ \frac{1}{2^m} + \frac{1}{5^n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, M = \mathbb{R}.$$

Wir betrachten hier M jeweils mit der euklidischen Norm als normierten Raum.

Aufgabe 34: Sei M ein metrischer Raum, $A \subseteq U \subseteq M$. Zeige folgende Aussagen:

a. $\overline{U} = \mathring{U} \,\dot{\cup}\, \partial U$.

b. ∂U ist abgeschlossen in M.

c. Ist A abgeschlossen und U offen, so ist $U \setminus A$ offen.

d. Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist wieder kompakt.

Aufgabe 35: Betrachte $U \subseteq M$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von M.

a. $X \subseteq U$ ist offen in $U \iff \exists\, O$ offen in M mit $X = U \cap O$.

b. $X \subseteq U$ ist abgeschlossen in $U \iff \exists\, A$ abgeschlossen in M mit $X = U \cap A$.

Man nennt die Menge X dann auch *relativ* offen oder abgeschlossen in M.

Aufgabe 36: Sei $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen. Zeige die folgenden Aussagen:

a. V ist nicht vollständig bezüglich der euklidischen L_2-Norm aus Beispiel 39.5.

b. V ist ein Banachraum bezüglich der Maximumsnorm aus Beispiel 39.5.

Hinweis, für diese Aufgabe wird der Inhalt der Vorlesung vom kommenden Montag benötigt.