Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2011/12, Blatt 10
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 15.12.2011, 10:00

Aufgabe 37:

a. Ein metrischer Raum M heißt *zusammenhängend*, wenn M und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
Zeige zunächst, daß jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, und folgere daraus mit Hilfe einer stetigen Abbildung $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, daß auch $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend sein muß.

b. Betrachte $V=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ als normierten Raum mit der euklidischen Norm aus Aufgabe 33 und betrachte $U=\{A\in V\mid A \text{ ist symmetrisch}\}$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von V auf U.
Zeige, daß die folgenden Mengen offen in U sind:
$$P=\{A\in U\mid A \text{ ist positiv definit}\}$$
und
$$I=\{A\in U\mid A \text{ ist indefinit}\}.$$

Aufgabe 38: Betrachte die Funktion
$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)^t\}\longrightarrow\mathbb{R}:(x,y)^t\mapsto\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$
Zeige, $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$. Ist f stetig in $(0,0)^t$ fortsetzbar?

Aufgabe 39:

a. Sei $f:(M,d)\longrightarrow(M',d')$ eine gleichmäßig stetige Abbildung metrischer Räume. Zeige, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Gilt die Aussage in a. auch noch, wenn f nur stetig ist?

c. Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ sei gleichmäßig stetig und bijektiv.
Zeige, ist f^{-1} stetig, so ist $U=\mathbb{R}^n$.

Hinweis zu c.: wenn $U\neq\mathbb{R}^n$, so kann man zeigen, daß U einen Häufungspunkt besitzt und diesen ausnutzen.

Aufgabe 40:

a. Zeige, der Integraloperator $I:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}:f\mapsto\int_0^1 f(x)\,dx$ ist bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.

b. Zeige, der Differentialoperator $D:\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}):f\longmapsto f'$ ist ein linearer Operator, der bezüglich der Maximumsnorm auf beiden Räumen *nicht* stetig ist.