Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2011/12, Blatt 11

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 05.01.2012, 10:00

Aufgabe 41:

a. Begründe, weshalb die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ ist und berechne die Ableitung $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$. Für welche $(r, \theta, \vartheta)^t \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$ invertierbar?

b. Berechne die Ableitung von $f \circ \varphi$ im Punkt $a = (1, 0, \frac{\pi}{2})^t$ für $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^t \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ zunächst mit Hilfe der Kettenregel und dann ohne diese.

Aufgabe 42: Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a. Ist f stetig im Ursprung?

b. Welche Richtungsableitungen von f im Ursprung existieren?

c. Ist f total differenzierbar im Ursprung?

d. Ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 43:

a. Zeige, für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2)^t \neq (0, 0)^t, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren die beiden partiellen Ableitungen $D_1D_2f(0, 0)$ und $D_2D_1f(0, 0)$, stimmen aber nicht überein.

b. Bestimme alle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\nabla f(x, y) = (2x \cdot \sin(y), 2y \cdot \cos(x))^t$.

Aufgabe 44:

a. Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ total differenzierbar mit $f(t \cdot x) = t^d \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dann erfüllt f für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Eulersche Gleichung

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = d \cdot f(x).$$

Hinweis, bestimme $Dg(1)$ für $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t \cdot x)$ auf zwei Arten. Weshalb ist g total differenzierbar?

b. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen. Zeige, dann ist f stetig auf U.