Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2011/12, Blatt 12
Thomas Markwig | Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 12.01.2012, 10:00

Aufgabe 45:

a. Bestimme das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,a}$ im Entwicklungspunkt $a = (0, \pi)^t$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \cos(y) \cdot \sin(x) - 2y \cdot (x^2 + \sin(x) - 1).$$

b. Bestimme das fünfte Taylor-Polynom $T^5_{f,a}$ für $a = (0, 0, 0)^t$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^t \longmapsto \frac{x + y}{1 - z^2} \cdot \ln(xy + 1).$$

Aufgabe 46:

a. Für $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j=1}^{m} ||x - a_j||_2^2$$

der Summe der Abstandsquadrate. Bestimme alle lokalen Extrema von f. Sind sie auch globale Extrema?

b. Bestimme die lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto (3x^2 + y^2) \cdot \exp(-x^2 - y^2).$$

c. Bestimme drei positive Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, deren Summe gleich einer vorgegebenen positiven Konstante a ist und so daß ihr Produkt maximal wird.

Aufgabe 47:

a. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion mit $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Zeige, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x, y) = f(x + y, 0)$ und finde eine solche Funktion.

b. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei zweifach stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ sei positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Zeige, f hat höchstens einen kritischen Punkt.

Aufgabe 48:

a. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für jeden Startwert $a_0 \in [0, \infty)$ konvergiert und daß der Grenzwert nicht vom Startwert abhängt.

b. Zeige, daß die Abbildung $\varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ genau einen Fixpunkt besitzt, wobei $\varphi(g) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(x \cdot g(t))}{2}\, dt$.