Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2011/12, Blatt 13

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 19.01.2012, 10:00

Aufgabe 49:

a. Zeige, ist $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gibt es eine injektive Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, für die $f \circ g$ konstant ist.

b. Es seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $f'(0) \neq 0 = f(0)$. Zeige, daß die Gleichung $f(y) = x \cdot g(y)$ lokal in $(x, y)^t = (0, 0)^t$ nach y aufgelöst werden kann als $y = \varphi(x)$ und bestimme die Ableitung der Funktion φ in 0.

Aufgabe 50: (Kugelkoordinaten)

Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

auf der offenen Menge

$$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

ein Diffeomorphismus ist mit Funktionaldeterminante

$$\det(D\varphi(r, \theta, \vartheta)) = r^2 \cdot \cos(\vartheta) > 0.$$

Aufgabe 51:

a. Überprüfe, ob die Abbildung $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : X \mapsto X^2$ in den folgenden Punkten lokal invertierbar ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Zeige, der Ursprung ist ein innerer Punkt des Bildes $\mathrm{Im}(f)$ der Abbildung

$$f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : X \mapsto X^2 + X.$$

Aufgabe 52:

a. Zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)^t \longmapsto (y - x^2) \cdot (y - 2x^2)$ keine Extremstelle hat, daß aber für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)^t$ die Funktion $f_{|G}$ ein isoliertes lokales Minimum in $(0, 0)^t$ besitzt. Formuliere das Problem dazu als ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung.

b. Bestimme mit Hilfe des Verfahrens der Lagrange Multiplikatoren eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(X) = 0$, deren Abstand zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in der euklidischen Norm minimal ist.